Universidad de Oviedo

Aula Abierta

Volumen 52, número 1, enero-marzo, 2023/págs. 43-52

Explorando la percepción de futuros maestros de primaria sobre el pensamiento matemático de los alumnos en un problema de proporcionalidad

María Burgos
Universidad de Granada (UGR), departamento de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación, Cartuja, Granada, España.
mail: mariaburgos@ugr.es
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4598-7684

Jorhan J. Chaverri
Universidad de Costa Rica (UCR), Escuela de Matemática de la Facultad de Ciencias, San Pedro, San José, Costa Rica.
Mail: jorhan2009@hotmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3504-5308

RESUMEN

Para garantizar un proceso de enseñanza y aprendizaje óptimo, el profesor de matemáticas debe ser capaz de analizar, interpretar y valorar la actividad matemática que desarrollan sus alumnos cuando resuelven las tareas que les propone. Esta competencia permite al profesor comprender los logros de aprendizaje y las dificultades que muestran los estudiantes de cara a tomar decisiones de acción pertinentes. El objetivo de este trabajo es describir y analizar la competencia de un grupo de 130 futuros maestros de educación primaria para interpretar las respuestas de estudiantes ante una situación de proporcionalidad (problema de comparación). Entre los resultados obtenidos destacamos un conocimiento didáctico-matemático del razonamiento proporcional insuficiente que impide a los futuros maestros interpretar de forma pertinente el grado de corrección en las soluciones o el pensamiento matemático aparente de los estudiantes.

Palabras clave: razonamiento proporcional; formación de profesores; conocimiento didáctico-matemático; análisis cognitivo.

Exploring prospective primary school teachers' perceptions of pupils' mathematical thinking in a proportionality problem.

ABSTRACT

In order to ensure an optimal teaching and learning process, the mathematics teacher must be able to analyse, interpret and assess the mathematical activity of his/her students when they solve the tasks he/she sets them. This competence enables the teacher to understand the learning achievements and difficulties that students show to make relevant decisions for action. The aim of this paper is to describe and analyse the competence of a group of 130 prospective primary school teachers to interpret students' responses to a situation of proportionality (comparison problem). Among the results obtained, we highlight an insufficient didactic-mathematical knowledge of proportional reasoning, which prevents future teachers from interpreting in a relevant way the degree of correctness in the solutions or the apparent mathematical thinking of the students.

Keywords: proportional reasoning; teacher training; didactic-mathematical knowledge; cognitive analysis.

ISSN: 0210-2773
DOI: https://doi.org/10.17811/rifie.52.1.2023.43-52

1. Introducción

Un problema importante en educación matemática consiste en precisar el tipo de conocimientos y competencias matemáticas y didácticas que debería tener el profesor de matemáticas para desarrollar su labor docente de manera adecuada (Chapman, 2014; Depaepe *et al.*, 2020; Mason, 2016). Existe un acuerdo generalizado en que el profesor de matemáticas requiere conocer las prácticas matemáticas necesarias para resolver los problemas que contempla el currículo y ser competente para implementarlas en el desempeño de su labor docente. Sin embargo, también se acepta que el profesor debe tener un conocimiento especializado del propio contenido, de las transformaciones que se deben aplicar al mismo en los procesos de enseñanza y aprendizaje y de los factores de tipo psicológico, sociológico y pedagógico, entre otros, que condicionan dichos procesos (Godino *et al.*, 2017; Schneider *et al.*, 2019). Este conocimiento especializado debe permitir al profesor "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes, lo que supone, en particular, identificar e interpretar la comprensión de los estudiantes cuando resuelven problemas y usar esta información para tomar decisiones de acción pertinentes (Buforn *et al.*, 2020; Ivars *et al.*, 2018).

Estudios previos muestran que un conocimiento limitado del contenido matemático dificulta a los profesores la tarea de analizar e interpretar las respuestas de los alumnos y, sin embargo, que el conocimiento del contenido no es suficiente para que los profesores reconozcan la comprensión matemática de sus alumnos (Bartell *et al.*, 2013; Fernández *et al.*, 2018; Jakobsen *et al.*, 2014; Ponte y Chapman, 2016). Estas investigaciones también ponen de manifiesto que, si bien lograr la competencia "mirada profesional" no es fácil, puede comenzar a desarrollarse desde los programas de formación inicial en dominios matemáticos concretos (Jacobs *et al.*, 2010; Simpson y Haltiwanger, 2017; Son, 2013).

En nuestro caso, nos interesa analizar cómo futuros maestros de primaria identifican e interpretan la comprensión de estudiantes en el contexto del razonamiento proporcional. El razonamiento proporcional entendido como la habilidad de establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y de extender dicha relación a otro par de cantidades (Lamon, 2007) es un objetivo presente desde el currículo de Educación Primaria, que integra las diversas interpretaciones del número racional (razón, operador, parte-todo, medida y cociente) e involucra un sentido de covariación y de comparaciones múltiples en términos relativos. Razón y proporción aparecen involucrados en la resolución de problemas en contextos que tan diversos como escalas, geometría de formas planas, cálculo de probabilidades, porcentajes, tasa, trigonometría, medidas o álgebra. Sin embargo, su aplicabilidad va más allá del aula de matemáticas ya que muchos temas dentro del currículo de dibujo técnico o artístico, ciencias o economía requieren la capacidad de razonar proporcionalmente.

A pesar de su importancia, numerosas investigaciones revelan que tanto profesores en formación como en ejercicio presentan dificultades para comprender y enseñar algunos de los componentes que constituyen el razonamiento proporcional (Ben-Chaim *et al.*, 2012; Buforn *et al.*, 2018; Burgos y Godino, 2022a; Izsák y Jacobson, 2017; Hilton y Hilton, 2019; Nagar *et al.*, 2016; Weiland *et al.*, 2019), así como para interpretar el pensamiento matemático de los alumnos cuando resuelven problemas de proporcionalidad (Buforn *et al.*, 2020; Burgos y Godino, 2022B; Fernández *et al.*, 2012, 2013).

A continuación, describimos el marco teórico y los objetivos de nuestra investigación. En la sección de método se describe el contexto de la intervención, el instrumento de análisis empleado y las categorías para el análisis de las producciones de los participantes. Después se presentan los resultados de la valoración por parte de los futuros maestros de las respuestas de los alumnos considerando los tipos de interpretación y su grado de pertinencia. El artículo finaliza con la discusión sobre las conclusiones y limitaciones encontradas en la investigación.

2. Marco teórico y objetivos de investigación

La capacidad del profesor de matemáticas para reconocer los aspectos que son relevantes en las situaciones de enseñanza y aprendizaje e interpretarlas desde una perspectiva profesional es esencial para una labor docente de calidad (Godino *et al.*, 2017; Jacobs *et al.*, 2010; Mason, 2016). Un aspecto particular de esta capacidad consiste en *mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes*. Esta competencia queda articulada por medio de las siguientes destrezas (Buforn *et al.*, 2020; Ivars *et al.*, 2018; Jacobs *et al.*, 2010):

a) Describir las estrategias de solución que utilizan los estudiantes identificando los elementos matemáticos relevantes en sus respuestas (discernir los detalles en las respuestas de los estudiantes).
b) Interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes, teniendo en cuenta los elementos matemáticos identificados (reconocer las relaciones entre los elementos identificados y las características del pensamiento matemático de los estudiantes).
c) Usar esta información para decidir cómo actuar ante la comprensión de los estudiantes o la falta de ella.

La competencia "mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes", supone reconocer los elementos relevantes en las estrategias empleadas por los estudiantes al resolver los problemas de matemáticas, pero también descartar los que no lo son. Implica identificar aspectos comunes a diferentes respuestas de los estudiantes, percibiendo relaciones y propiedades en sus prácticas matemáticas. Pero también supone disponer de un lenguaje específico que permita al profesor expresar con sentido lo que ha identificado como relevante desde el punto de vista matemático, es decir, desarrollar un discurso profesional para explicar la comprensión de los alumnos cuando hacen y hablan de matemáticas.

En el ámbito específico del razonamiento proporcional, autores como Buforn *et al.* (2020), Fernández *et al.* (2012; 2013) y Son (2013), entre otros, estudian la competencia "mirada profesional" en futuros maestros de educación primaria. Son (2013) analiza cómo futuros docentes interpretan la respuesta errónea de una alumna a un problema de semejanza de rectángulos, en el que esta utiliza una estrategia aditiva. Los resultados muestran que, a pesar de su conocimiento de la razón y proporción, los futuros maestros se centran en aspectos procedimentales más que conceptuales al interpretar el error. Fernández *et al.* (2012; 2013) analizan las descripciones que hacen futuros maestros sobre respuestas de alumnos de primaria a problemas proporcionales y no proporcionales. Según los autores, discriminar entre ambas situaciones es un elemento clave para identificar evidencias de diferentes niveles del razonamiento proporcional de los estudiantes. Sin embargo, los futuros maestros tienen dificultades para diferenciar las situaciones proporcionales de las aditivas, e incluso cuando reconocer la diferencia, les resulta complejo justificar por qué las respuestas de los alumnos son o no correctas considerando los elementos matemáticos implicados en las situaciones (Fernández *et al.*, 2013). El análisis realizado en estas investigaciones permite a los autores identificar y caracterizar niveles de desarrollo de la mirada profesional en los futuros maestros en el dominio de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales. Finalmente, Buforn *et al.* (2020) analizan cómo reconocen los profesores en formación el razonamiento de los estudiantes en un problema de comparación de razones. Observan que identificar el proceso de unitización (construcción de una unidad de referencia que permite la comparación) como un elemento matemático clave del problema permite que los futuros profesores lo utilicen para describir el razonamiento de los alumnos. Sin embargo, también consideran que hay otros factores que afectan al reconocimiento de las características del razonamiento de los alumnos, ya que algunos participantes que identificaron los elementos matemáticos clave habían hecho comentarios generales sobre las respuestas de los alumnos.

Los futuros maestros tienen que proporcionar explicaciones matemáticas de los procedimientos usados por los estudiantes para resolver los problemas, analizar y comprender sus métodos de resolución (los usuales y los que no) e identificar los errores cometidos para inferir características de la comprensión de los estudiantes. Por tanto, precisan de conocimientos didáctico-matemáticos específicos del contenido matemático que se pone en juego en los problemas (Godino *et al.* 2017; Fernández *et al.*, 2018), en nuestro caso del razonamiento proporcional. En particular, los futuros maestros deben conocer las diferentes estrategias usadas por los estudiantes para comparar y conocer los principales errores que cometen los estudiantes, como el uso de estrategias aditivas o la interpretación incorrecta de la razón (Buforn *et al.*, 2020). También deben distinguir entre comparaciones relativas y absolutas y reconocer el papel de la razón como índice comparativo en las comparaciones relativas (Buforn *et al.*, 2018).

Teniendo en cuenta estas ideas, en este trabajo nos interesa analizar cómo futuros maestros de primaria entienden las intervenciones de alumnos durante un episodio de clase en el que un hipotético maestro propone un problema de comparación de razones. En un problema de este tipo, se dan cuatro valores relacionados de manera multiplicativa dos a dos, formando dos razones que relacionan cantidades de la misma magnitud o de magnitudes diferentes ("*a* es a *b*" como "*c* es a *d*"). Pretendemos dar respuesta a dos objetivos de investigación:

1) Estudiar cómo interpretan los futuros maestros de primaria el razonamiento matemático de los alumnos en un problema de comparación de razones.
2) Valorar la coherencia de las reflexiones de los futuros maestros sobre el razonamiento matemático de los alumnos con las prácticas operativas o discursivas de los alumnos, en particular, cómo identifican sus errores.

Las nociones de comprensión, conocimiento y competencia que usamos se corresponden con las propuestas en el marco del Enfoque Ontosemiótico (Godino *et al.*, 2007). En dicho marco la comprensión es cuestión de grado y se concibe en términos del acoplamiento de significados personales e institucionales, entendidos como sistemas de prácticas operativas y discursivas (Godino *et al.*, 2007). La mayor o menor concordancia con el significado institucional de referencia revela el grado de conocimiento y comprensión de los futuros maestros, que en nuestro caso lo interpretamos como "grado de pertinencia" de las respuestas. En la sección 3.2 se incluye el análisis institucional de referencia de la tarea y después en la sección 3.3 damos los criterios que usamos para considerar el grado de pertinencia de las respuestas como alta, media o baja, atendiendo a la descripción de las estrategias e identificación de elementos matemáticos y a la interpretación en base a estos del pensamiento de los alumnos (Buforn *et al.*, 2020).

3. Método

3.1. Participantes y contexto

La intervención se llevó a cabo con un grupo de 130 futuros maestros (FM en adelante), estudiantes de tercer curso del grado de Educación Primaria (con edades comprendidas entre los 21 y los 22 años; 63,1% de mujeres y 36,9% hombres), en el marco de la asignatura de Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas en Educación Primaria (sexto semestre) en la Universidad de Granada (España). El nivel de desempeño en las asignaturas previas de este grupo de FM es representativo de los resultados generales en el grado. Los participantes habían estudiado la proporcionalidad como parte de los contenidos de la asignatura de Bases Matemáticas para la Educación Primaria durante su primer semestre de formación universitaria. En esta asignatura se espera que los FM lleguen a conocer y articular los principales conceptos, procedimientos y sus propiedades en los diferentes temas de las matemáticas de Educación Primaria y sean capaces de enunciar y resolver problemas matemáticos de manera flexible en una variedad de situaciones y contextos, comunicando de forma eficaz argumentaciones matemáticas.

En la asignatura de segundo (cuarto semestre) los estudiantes recibieron formación específica sobre los fundamentos de la Didáctica de las Matemáticas tanto en aspectos cognitivos (aprendizaje matemático, errores y dificultades), como instruccionales (tareas matemáticas, materiales y recursos en el aula). En la asignatura en la que se desarrolla la experiencia (impartida por la primera autora de este trabajo), los FM deben profundizar y emplear los conocimientos adquiridos en cursos previos para fundamentar y (re)diseñar tareas matemáticas de acuerdo con unos contenidos y finalidades específicas. En particular, se espera que puedan modificar los problemas de acuerdo con las dificultades encontradas por los estudiantes en su resolución.

3.2. La tarea

En la Figura 1 aparece la consigna propuesta a los FM. En ella se describe un episodio de clase y se les pide que interpreten las respuestas dadas por los alumnos. Esta tarea forma parte de las actividades de evaluación de la asignatura, propuestas dentro del tema dedicado al análisis y creación de tareas matemáticas escolares. La tarea se planteó al final de la última clase teórica de dicho tema. Los FM disponían de una semana para desarrollarla en casa, si bien debían comentar con la profesora los avances del estado de su trabajo antes de su entrega (sesiones prácticas o de tutoría). La profesora encargada de la docencia fue quien condujo la toma de datos.

El maestro propone el siguiente problema a su clase de 6º de educación primaria.

En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 15 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. ¿En qué curso se lee más? Explica tu respuesta.

A continuación, aparecen los comentarios hechos por algunos de sus alumnos al resolver o tratar de resolver este problema:

Luis: *Es fácil…En 6º curso leen 15 y en 5º leen 12, así que leen más en 6º.*

María: *Sí, pero eso no vale... Yo he dividido 60 entre 15 que sale a 4 y luego 40 entre 12 que sale 3,33333 infinitos, pero como 4 es mayor pues leen más en 6º.*

Juan: *Yo también he hecho 60 entre 15, pero ese 4 no sirve. No es lo mismo 60 que 40, hay que ponerlo a la misma unidad.*

¿Cómo interpretas las respuestas de los alumnos?

Figura 1. *Tarea de evaluación propuesta a los FM. Elaboración propia.*

El problema que motiva la situación en el episodio de clase de la Figura 1 había sido propuesto para su resolución a un grupo de FM que habían participado en una intervención formativa previa (Burgos y Godino, 2022a). Las respuestas de Luis, María y Juan se extraen de los resultados de aquella experiencia. Las dos primeras representan los tipos de estrategias erróneas más frecuentes mostradas por los FM (con una formación previa análoga a los de la muestra) en Burgos y Godino (2022a) y que también aparecen en investigaciones previas (Buforn *et al.*, 2018; Buforn *et al.*, 2020). La respuesta de Juan pretende que los FM reflexionen sobre el papel del todo o unidad en la comparación de razones.

En el problema que plantea el maestro a sus alumnos de 6º de primaria se espera que éstos comparen las razones de alumnos que leen a diario respecto del total de alumnos en cada uno de los cursos y que decidan en tal caso en qué curso se lee más "proporcionalmente". Por tanto, como $\frac{15}{60} < \frac{12}{40}$, se debe concluir que, en relación con el número de alumnos de cada curso se lee más en 5º de primaria. Sin embargo, la pregunta tal cual está formulada en el problema propuesto podría dar lugar a que los alumnos respondan de manera absoluta: "se lee más en 6º porque 15 leen a diario, mientras que en 5º leen a diario 12".

Esto podría ser lo que interpreta Luis, se lee más donde hay más alumnos que leen a diario. Sin embargo, también podría ocurrir que el alumno, aun entendiendo la pregunta en un sentido "proporcional", responda con una estrategia aditiva incorrecta (uso de una diferencia entre las partes en lugar de establecer la relación multiplicativa). María, por otro lado, considera que ese procedimiento no es válido, previsiblemente porque comprende el carácter relativo de la comparación. Sin embargo, no compara las razones *alumnos lectores* : *alumnos totales* sino su recíproca *alumnos totales* : *alumnos lectores*, mediante la expresión de la razón como decimal. El error que comete en este caso es que la comparación de las razones recíprocas lleva a decidir que el curso en el que se lee más (proporcionalmente) es aquél en el que es menor dicha razón unitaria (interpretación incorrecta de la razón). En el caso de Juan, no llega a decidir en qué curso son mejores lectores, sino que indica, por un lado, que el resultado obtenido por María no es útil ("ese 4 no sirve") y, por otro, que (para comparar) deben estar en "la misma unidad". Luis podría referirse a la "unidad" o "todo" de la fracción (apunta "no es lo mismo 60 que 40").

3.3 El análisis

Se emplea el análisis de contenido (Cohen *et al.*, 2018) para examinar las producciones de los FM a la tarea incluida en la Figura 1. A continuación, describimos y ejemplificamos las categorías utilizadas para el análisis de las respuestas de los participantes cuando interpretaron los comentarios de los tres alumnos (Luis, María y Juan) en el episodio de clase, así como aquellas empleadas para valorar el grado de pertinencia de sus apreciaciones.

Para la determinación de las categorías de análisis de las respuestas de los alumnos se tuvo en cuenta las referencias a elementos matemáticos (qué aspectos matemáticos identifican) y cómo los utilizan para interpretar la comprensión o el error reflejado en las estrategias de los alumnos. En este proceso, cada uno de los investigadores analizó de manera independiente un cuarto de los informes de los participantes. Después contrastaron y discutieron las categorías de tipos de descripción obtenidas, así como los grados de pertinencia asignados, y ante cualquier disparidad se revisaron de manera conjunta los protocolos de respuesta. A continuación, se prosiguió con el análisis independiente (de nuevo cada uno de los investigadores con un cuarto distinto de respuestas de FM) y se volvió a discutir para readaptar o añadir categorías y revisar la clasificación de las respuestas en las que no había consenso. Este proceso se repitió hasta haber valorado todas las respuestas de los participantes.

Encontramos algunas respuestas de FM *no concluyentes*, es decir, que no permiten identificar qué error cree el FM que ha cometido el alumno. Por ejemplo, descripciones genéricas como la de FM126: "cada respuesta complementa a la otra acercándose cada vez más a la resolución final adecuada", o específicas del alumno, como las de FM10: "No sabemos cómo [Juan] lo ha resuelto al final, pero todo apunta a que va por buen camino (su razonamiento)."

Categorías de interpretaciones concluyentes sobre la respuesta de Luis

- *La formulación de la pregunta lleva a Luis a comparar de forma absoluta.* En este caso, los FM consideran que Luis realiza una comparación absoluta y no relativa debido a que la pregunta no es clara:

> Luis no considera el conjunto de la población en total, tan solo se centra en comparar el número de alumnos que leen en 6º y el número de alumnos que lo hacen en 5º. Su razonamiento es si en 6º leen 15 y en 5º leen doce pues está claro que en 6º leen más. Si nos fijamos en la pregunta no es del todo clara e induce a error ¿En qué curso leen más? Pues él dice en 6º porque hay 15 alumnos mientras que en 5º solo 12. (FM111)

- *No tiene en cuenta que el total de alumnos es distinto en cada curso*. Por ejemplo, FM82 señala que Luis ha resuelto el problema "sin darse cuenta de que no hay el mismo número de alumnos en los dos cursos por lo tanto no podemos averiguar a simple vista en cuál de los dos se lee más".
- *Da una respuesta rápida sin reflexionar sobre la necesidad de emplear fracciones.* En este caso, los participantes consideran que Luis ha dado una respuesta precipitada motivada por una falta de conocimientos sobre fracciones. Por ejemplo, FM125 indica que la respuesta de Luis es "la contestación más rápida y simple que podemos pensar sin poner en práctica las habilidades y pensamiento matemático. No ha planificado ni ha tenido en cuenta los elementos ni propiedades de las fracciones".
- *No recurre a la relación de proporcionalidad o su comprensión sobre la proporcionalidad es deficiente.* Esta categoría contempla las valoraciones de los FM que mencionan explícitamente que Luis no ha aplicado un razonamiento proporcional ("en ningún momento ha pensado en la relación de proporcionalidad, ya que, aunque el número es mayor, también hay bastantes más alumnos en un curso que en otro", FM45) o lo ha hecho de forma incorrecta, en cuyo caso indican el uso de una estrategia aditiva, de comparación absoluta o que no emplea porcentajes para comparar de forma proporcional.

Categorías de interpretaciones concluyentes sobre la respuesta de María

- *Muestra carencia en el razonamiento proporcional o sus componentes.* Aquí, se agrupan las valoraciones de los FM que coinciden en que el error de María se debe a deficiencias en el dominio de algún aspecto de la proporcionalidad. Por ejemplo, FM15 plantea que María "no ha comprendido el concepto de proporción, y aunque haya hecho las operaciones bien, no las ha interpretado de manera correcta".

- *Plantea de forma incorrecta la relación entre el todo y la parte.* En este caso, los FM consideran que María establece de forma incorrecta la relación parte-todo o que las razones utilizadas están planteadas al revés. Por ejemplo, FM79 indica: "la relación parte-todo la ha realizado de manera incorrecta ya que la ha planteado al contrario y por tanto el resultado le sale erróneo".
- *No tiene en cuenta que el total de alumnos es distinto en cada curso.* En este caso, los FM piensan que María, al igual que Juan no ha tenido en cuenta el número total de alumnos en cada clase es distinto. Este es el caso de FM8 quien indica: "A María le ha ocurrido algo similar, pues tampoco ha tenido en cuenta el número total de alumnos que conforman cada clase".
- *Intenta determinar el promedio de cuántos libros lee cada alumno en lugar de usar proporcionalidad.* En este caso, los FM asumen, de manera similar a FM118 que, con la división, María pretende determinar la media del número de libros leídos: "María ha interpretado que para calcular en que curso se lee más debe hacer la media entre el número de alumnos totales en cada grupo y el número de lectores".
- *Hace operaciones al azar, sin sentido o erróneas*. En esta categoría, los FM consideran que María realiza operaciones sin analizar previamente el problema, que son erróneas o sin sentido. Por ejemplo, FM03 aprecia: "María pienso que ha intentado con las operaciones sacar algún resultado, pero no ha entendido el problema y ha decidido, por ejemplo, hacer esa operación".

Categorías de interpretaciones concluyentes sobre la respuesta de Juan

- *Identifica la necesidad de comparar las partes partiendo de la misma unidad (totales iguales/común denominador)*. Los participantes consideran esto como evidencia de cierto dominio del razonamiento proporcional, valorando el razonamiento de Juan como parcialmente correcto. Por ejemplo, FM75 señala:

> Juan reconoce que son magnitudes directamente proporcionales, al afirmar que hay que ponerlo a la misma unidad. Es decir, no es lo mismo que lean 15 personas en una clase de 60 alumnos que en una de 40.

- *Muestra carencia en el razonamiento proporcional o sus componentes*. En este caso, los participantes valoran la respuesta de Juan como incorrecta en base a dichas deficiencias ("tiene problemas para comprender la proporcionalidad", FM15). Por ejemplo, una respuesta de este tipo sería la dada por FM35:

> Es cierto que no es lo mismo 60 que 40 pero no hace falta ponerlo en la misma unidad. Sino hallar la proporción de libros que son leídos para saber con respecto a esa cantidad dónde se han leído más. Tampoco comprende la proporcionalidad.

- *Tiene en cuenta que el total de alumnos es distinto en cada curso*. Los participantes basan su interpretación en que este alumno, a diferencia de Luis y María, si tiene en cuenta la importancia de que el número de alumnos totales sea distinto en ambos grupos. Por ejemplo, FM27 señala:

> Juan si ha tenido en cuenta que en las dos clases no hay el mismo número de alumnos y ha considerado que realizando la división no se puede saber en qué clase se ha leído más.

- *Tiene dificultades para expresarse*. En este caso, los FM creen que la respuesta de Juan no llega a ser completamente correcta debido a sus problemas para expresar o comunicar su razonamiento. Por ejemplo, FM74 sugiere que "…debido a su corta edad tiene problemas para explicarse y es por ello que su respuesta no termina de ser acertada".

Grado de pertinencia en las interpretaciones de la comprensión de los alumnos

Consideramos las siguientes categorías (establecidas a priori) de acuerdo con el grado de precisión en que los FM describen la estrategia del alumno e interpretan el origen del error. Así, cada valoración se considera de pertinencia:

- *Alta,* si el FM describe correctamente la respuesta dada por el alumno, interpretando su estrategia o error a partir de los elementos matemáticos identificados.
- *Media,* si el FM describe correctamente la respuesta dada por el alumno, pero no interpreta de forma adecuada o completa su estrategia o error; no es preciso o comete errores en el uso de los detalles matemáticos.
- *Baja,* en cualquier otro caso. Así, se consideran nada pertinentes todas las interpretaciones categorizadas como no concluyentes, aquellas en las que indica lo que no ha hecho el alumno o las que declaran que el error está en dificultades para expresarse.

El proceso descrito para la determinación de las categorías permitió acordar que las categorías cumplían ciertas características que asegurasen su fiabilidad: a) claramente determinadas, b) mutuamente excluyentes, c) significativas, d) replicables.

Algunas de las categorías de interpretaciones sobre las respuestas de los hipotéticos alumnos tienen claramente un grado de pertinencia asociado (por ejemplo, aquellas categorizadas como no concluyentes tienen pertinencia baja). Pero, en otros casos, producciones de los FM consideradas en una misma categoría de interpretación pueden presentar distintos grados de pertinencia, dado que depende del nivel de precisión en que los elementos matemáticos relevantes se emplean para valorar la respuesta del alumno.

En la siguiente sección se muestran ejemplos de estas categorías, para las valoraciones de los distintos alumnos.

3. Resultados

A continuación, se muestran los resultados obtenidos del análisis y valoración de los informes entregados por 127 participantes. Los otros tres interpretaron de manera conjunta las respuestas de Luis, María y Juan: FM105 y FM120 consideran que la pregunta está formulada de manera ambigua; FM122 señala simplemente que "los alumnos no emplean proporcionalidad".

El grado de adecuación de las valoraciones se puntuaron con 0, 1, 2 puntos según estas fueran de pertinencia baja, media o alta. Así, dado que debían valorar el comentario de tres alumnos, podían obtener 6 puntos como puntuación máxima. De forma general, se observa los FM no tuvieron éxito al valorar las respuestas de los alumnos. En concreto, el 80,3% de los participantes obtuvieron menos de 3 puntos, un 12,6% lograron 3 puntos y el resto, 4 o 5 puntos.

La Tabla 1 presenta las frecuencias encontradas para las distintas categorías de interpretación de los FM al comentario de Luis y su nivel de pertinencia asociado.

Es importante que el profesor reflexione sobre si el problema que plantea al estudiante está claramente formulado, en particular, si la pregunta se ajusta a sus intenciones didáctico-matemáti-

Tabla 1.
Frecuencias (porcentajes) en la valoración de la respuesta de Luis por los FM (n=127). Elaboración propia.

Interpretación \ Pertinencia	Baja	Media	Alta	Total
La formulación de la pregunta lleva a Luis a comparar de forma absoluta	0 (0)	5 (3,9)	7 (5,5)	12 (9,5)
No tiene en cuenta que el total de alumnos es distinto en cada curso	6 (4,7)	54 (42,5)	0 (0)	60 (47,2)
Respuesta rápida sin reflexionar sobre la necesidad de emplear fracciones.	13 (10,2)	—	—	13 (10,2)
No utiliza la relación de proporcionalidad o su comprensión es deficiente.	0 (0)	35 (27,6)	3 (2,4)	38 (29,9)
No concluyente.	4 (3,2)	—	—	4 (3,2)
Total	23 (18,1)	94 (74,0)	10 (7,8)	127(100)

cas. Los FM debían observar que la forma absoluta en la que está formulada la pregunta del episodio podía motivar la respuesta de Luis. En este caso, un escaso porcentaje de los participantes reflexionaron al respecto (Figura 2).

> Luis no considera el conjunto de la población en total, tan solo se centra en comparar el número de alumnos que leen en 6º y el número de alumnos que lo hacen en 5º. Su razonamiento es si en 6º leen 15 y en 5º leen doce pues está claro que en 6º leen más. Si nos fijamos en la pregunta no es del todo clara e induce a error ¿En qué curso leen más? Pues el dice en 6º porque hay que alumnos mientras que en 5º solo 12.

Figura 2. *La formulación de la pregunta no es clara y admite comparación absoluta (FM111). Valoración pertinente.*

La mayoría dieron por hecho que los alumnos debían interpretar "¿en qué curso se lee más?" de forma proporcional, considerando en algunos casos que la redacción de la pregunta era la adecuada a la edad de los alumnos a los que se dirigía. Casi la mitad de los participantes consideraron que Luis no había tenido en cuenta el total de alumnos que tiene cada curso, inclinándose por comparar únicamente el número de lectores. Estos FM no profundizaron en cuál podía ser el origen de esta respuesta (la redacción de la pregunta del problema o el no haber establecido una relación de proporcionalidad conveniente, por ejemplo) y con frecuencia indicaron que el alumno "no hace ninguna operación", como debilidad en su trabajo matemático.

El 29,9% indicaron que la respuesta de Luis se debe a que no reconoce la relación de proporcionalidad entre las magnitudes "número de alumnos en clase" y "número de alumnos lectores", o que un razonamiento proporcional limitado lo lleva a hacer una comparación sólo de las partes. En algunos casos (diez de los 38 FM) se refieren explícitamente al uso de una estrategia aditiva incorrecta o a la dificultad de Luis para distinguir situaciones proporcionales de aditivas (Figura 3).

> a) ¿Cómo interpretas las respuestas de los alumnos?
> *-Luis es el que más lejos está de la solución, ya que directamente no ha entendido que es un problema en el que hay un todo (el total de la clase) y una parte (la que lee) de ese todo. Está comparando únicamente las partes de ese todo. No ha captado el razonamiento proporcional. No distingue entre situaciones aditivas y proporcionales.*

Figura 3. *Valoración de FM53 a la respuesta de Luis. Carencia en el razonamiento proporcional. Pertinencia media.*

En otros casos, los FM reconocen que la falta de comprensión de la relación proporcional no permite a Luis identificar en qué curso hay un mayor porcentaje de lectores.

En la Tabla 2 se muestran los resultados de las valoraciones realizadas por los FM del comentario de María, así como su nivel de pertinencia asociado.

Como se observa en la Tabla 2, casi una cuarta parte de los FM consideraron que María muestra carencias en el razonamiento proporcional. Aunque no suelen ser descripciones que vayan más allá de indicar falta de conocimiento sobre proporcionalidad, porcentajes o equivalencia de fracciones (por lo que se consideraron de pertinencia baja), aquellos participantes que dieron una interpretación más detallada indicaron que, si bien el procedimiento seguido por María es el adecuado, la interpretación que da al resultado es incorrecta (Figura 4). Estas interpretaciones se consideran de pertinencia media.

> En el caso de María, el procedimiento llevado a cabo es correcto, sin embargo, no interpreta bien los resultados. En mi opinión, realiza las divisiones mecánicamente, sin comprender bien el proceso. Al obtener un número más grande, la proporción de niños que no leen respecto a los que sí es mayor, por lo que la respuesta sería totalmente al revés. Esto implica que María no comprende los conceptos de razón y proporcionalidad.

Figura 4. *Valoración poco pertinente de la respuesta de María. Carencia en el razonamiento proporcional (FM60).*

Las respuestas de los FM (26%) que consideran que María plantea de forma incorrecta la relación entre el todo y la parte (ha dividido el todo entre la parte, las razones utilizadas están planteadas al revés, …) fueron, en general, pertinentes. Por ejemplo, como se observa en la Figura 5, FM75 considera que María si identifica la relación parte-todo, lo que supone conocimiento de la razón, pero dividir el todo entre la parte le impide reconocer las razones "uno de cada 4" en 6º y "uno de cada 3,33333" en 5º que implica que "se lee más en 5º".

> María, a diferencia de Luis, identifica la relación parte-todo en la razón. Sin embargo, divide el todo entre las partes e identifica el resultado erróneamente, ya que sería: En 6º curso lee uno de cada 4 y en 5º curso lee uno de cada 3,33333, por lo que se lee más en 5º.

Figura 5. *Valoración pertinente a la respuesta de María. División del todo entre la parte (FM75).*

Se consideraron no pertinentes las respuestas en las demás categorías: María no tiene en cuenta que el total de alumnos es distinto en cada curso, María intenta determinar el promedio de cuántos libros lee cada alumno (se observa en este caso un conocimiento deficiente del significado de la media aritmética y de su cálculo) o realiza operaciones al azar, sin sentido o erróneas. Algunos FM que consideran que la división de María es errónea, muestran un conocimiento deficiente de la razón (Figura 6), identificando en el cociente dado por María cuantos alumnos no leen por cada alumno que si lo hace.

Tabla 2.

Frecuencias (porcentajes) en la valoración de la respuesta de María por los FM (n=127). Elaboración propia.

Interpretación / Pertinencia	Baja	Media	Alta	Total
Carencia en el razonamiento proporcional o sus componentes.	18 (14,2)	13 (10,2)	0 (0)	31 (24,4)
Plantea de forma incorrecta la relación entre el todo y la parte.	3 (2,4)	16 (12,6)	14 (11,0)	33 (26,0)
No tiene en cuenta que el total de alumnos es distinto en cada curso.	15 (11,8)	–	–	15 (11,8)
Intenta determinar el promedio de cuántos libros lee cada alumno.	6 (4,7)	–	–	6 (4,7)
Realiza operaciones al azar, sin sentido o erróneas.	24 (18,9)	–	–	24 (18,9)
No concluyente.	13 (10,2)	–	–	13 (10,2)
No contesta	5 (3,9)	–	–	5 (3,9)
Total	84 (66,1)	29 (22,8)	14 (11,0)	127 (100)

> María sin embargo ha intentado ir más allá que Luis, resolviendo el problema mediante una división. En la división divide el total de alumnos del curso entre los que leen a diario de ese mismo curso. De esta forma el dato que está obteniendo es cuantos alumnos no leen por cada alumno que lee. Al no saber realmente que significa ese dato llega a la conclusión de que, como 4 es más que 3,33, más alumnos leen en 6º.

Figura 6. *Valoración a la respuesta de María. El total sobre la parte da la razón de los que no leen sobre los que leen (FM33).*

> La respuesta de Juan, a mi parecer, es la más correcta y la que más se acerca, aunque sigue siendo errónea, o al menos incompleta. Juan dice algo fundamental para la resolución de este problema y es lo siguiente: "hay que pasarlo a la misma unidad" este sería un primer paso para la resolución del problema y se realizaría mediante una regla de 3.

Figura 7. *Valoración de FM123 a la solución de Juan como la más correcta. Poco pertinente.*

En la Tabla 3 se muestran los resultados de las valoraciones (tipo de interpretación y pertinencia) realizadas por los FM al comentario de Juan.

Mientras que la mayoría de los participantes (87%) consideran que la respuesta más errada es la de Luis por la comparación absoluta que realiza (sin considerar la ambigüedad del requerimiento), un 21,3% de los FM consideran que Juan es el alumno que más se acerca a la solución correcta (Figura 7). No obstante, dado que el porcentaje de respuestas no concluyentes al valorar la intervención de este alumno es bastante elevado, es difícil saber en qué basan su opinión.

En su mayoría se limitan a afirmar como FM116 que "Juan ha sido el que estaba más encaminado a encontrar la solución" o como FM108: "el único que hace bien el problema". Si embargo, Juan no llega a responder a la pregunta planteada, sino que indica que ha realizado la misma división que María (sin decir por qué) pero que reconoce que su resultado no es válido, precisando que "hay que ponerlo a la misma unidad". Cuando los FM detallan lo que ven detrás de la respuesta de Juan, interpretan en esta afirmación un cierto razonamiento proporcional ("se acerca al razonamiento proporcional pero no es del todo correcto. Se acerca debido a que comenta que 'hay que ponerlo a la misma unidad'", FM38). También consideran que con "ponerlo a la misma unidad" se refiere a obtener fracciones con igual denominador para compararlas ("[Juan] ha tenido en cuenta que hay que obtener el común denominador antes de realizar ninguna operación", FM62). Algunos de estos participantes añaden que lo que le ha impedido acabar el problema es desconocer cómo realizar el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Así, un 33% de los FM encuentran rasgos de conocimiento sobre la proporcionalidad cuando Juan reconoce que, para comparar partes, los todos deben ser iguales (Figura 8).

Tabla 3

Frecuencias (porcentajes) en la valoración de la respuesta de Juan por los FM (n=127). Elaboración propia.

Interpretación / Pertinencia	Baja	Media	Alta	Total
Identifica la necesidad de comparar las partes partiendo de la misma unidad	11 (8,7)	29 (22,8)	2 (1,6)	42 (33,1)
Muestra carencia en el razonamiento proporcional o sus componentes	11 (8,7)	9 (7,1)	1 (0,8)	21 (16,5)
Tiene en cuenta que el total de alumnos es distinto en cada curso	12 (9,45)	3 (2,4)	0 (0)	15 (11,8)
Dificultades para expresarse	3 (2,4)	–	–	3 (2,4)
No concluyente.	39 (30,7)	–	–	39 (30,7)
No contesta	7 (5,5)	–	–	7 (5,5)
Total	83 (65,4)	41 (32,3)	3 (2,4)	127 (100)

> Aplica bien la proporcionalidad, pues piensa en igualar todos para poder comparar de forma correcta que parte es mayor y tiene adquirido el uso de las equivalencias.

Figura 8. *Valoración de FM69 a la respuesta de Juan basada en su uso de la proporcionalidad. Poco pertinente.*

Los FM que han considerado que la respuesta de Juan se debe a carencias en el razonamiento proporcional han sido poco precisos, indicando su falta de comprensión sobre la proporcionalidad o que carezca de sentido "poner a la misma unidad" (Figura 9). Algunos de estos participantes indican que Juan se confunde con la idea de "unidad de magnitud" ("Juan se equivoca al decir que no están en la misma unidad. Tanto el 60 como el 40 se corresponden a los alumnos", FM11; "[Juan] tiene un problema con los cambios de unidad ya que los confunde", FM106).

> - Juan. Es cierto que no es lo mismo 60 que 40 pero no hace falta ponerlo en la misma unidad. Sino hallar la proporción de libros que son leídos para saber con respecto a esa cantidad dónde se han leído mas. Tampoco comprende la proporcionalidad.

Figura 9. *Interpretación no pertinente de FM35 sobre la respuesta de Juan.*

Finalmente, comparando los resultados de las tablas 1, 2 y 3, observamos que los FM tuvieron mayor éxito al interpretar la respuesta de Luis, apreciando mayoritariamente que no había tenido en cuenta que el total de alumnos en cada grupo es diferente (Tabla 1) por lo que la comparación que establece no es acertada. Presentaron más dificultades al valorar con éxito el comentario de María, donde sólo la mitad de los FM se refirieron a cómo había establecido la relación entre la parte y el todo o a que no hubiera usado convenientemente la relación proporcional para extraer conclusiones, mostrando cierto grado de pertinencia sólo en poco más del 33% de las valoraciones (Tabla 2). Los resultados son similares al analizar la respuesta de Juan, en cuyo caso, aunque se produjo el mayor porcentaje de respuestas no concluyentes (30,7%), las valoraciones (34,6%) correspondientes a las primeras categorías (Tabla 3) fueron algo pertinentes.

4. Discusión

En este trabajo hemos informado de las competencias de un grupo de futuros docentes de Educación Primaria para interpretar las respuestas de alumnos a una tarea de comparación de razones. Los resultados muestran las dificultades que supone a los FM la tarea de identificar por medio de las prácticas (operativas o discursivas) de los alumnos, cuál es su pensamiento matemático y en base a esto, justificar por qué consideran correcta la respuesta de un alumno de primaria y cuál creen que es el error que ha cometido. Esto los lleva a decidir si una solución es buena o no, en base a lo que esperan desde su punto de vista experto ("usar porcentajes", "emplear regla de tres") sin analizar la validez de las estrategias y argumentos que emplean los alumnos ante una determinada situación-problema, y sin cuestionar el requerimiento explícito de la misma. Así, se encuentra de forma frecuente en los informes de los participantes referencias a que se debería aplicar la regla de tres para llegar a la solución correcta, tanto de forma genérica para los tres alumnos, como específica cuando consideran el procedimiento que habría llevado al éxito a Juan (Figura 7) o cómo deberían haber calculado el porcentaje de lectores. Parece que la regla de tres sigue siendo lo primero en lo que piensan los FM cuando se encuentran frente a una situación de proporcionalidad, sin notar que, en un problema de comparación, como en este caso, no es el procedimiento que permite resolverlo (al menos de forma eficiente). Los maestros en formación no tienen la riqueza o las perspectivas múltiples o relativistas necesarias para ofrecer algo más que su única "respuesta correcta" (Buforn *et al.*, 2020, p. 24). Esto puede estar motivado por un conocimiento sesgado, débil o incompleto del razonamiento proporcional. Así, coincidiendo con investigaciones previas, se observa que los FM tienen dificultades para comprender los significados de razón y proporción (Buforn *et al.*, 2018), interpretar adecuadamente las razones en situaciones de comparación (Gómez y García, 2014) y diferenciar situaciones aditivas y multiplicativas (Hilton y Hilton, 2019). Además, se sustentan en la regla de tres en situaciones de proporcionalidad sin discutir si es pertinente (Riley, 2010) y al evaluar las respuestas de los alumnos, defienden la regla de tres como la "mejor estrategia" para emplear en tareas de proporcionalidad (Burgos y Godino, 2022b). Como sugiere Son (2013), una comprensión limitada de los FM sobre razón y proporción y su limitada exposición a la identificación de los errores de los estudiantes los motiva a centrarse simplemente en las reglas y procedimientos a la hora de identificar la fuente de los errores de los estudiantes.

El que un escaso porcentaje de participantes indicaran el carácter ambiguo del requerimiento en la situación del episodio, revela las deficiencias por parte de los FM para identificar si un problema matemático, en nuestro caso de proporcionalidad, está bien diseñado, y las dificultades que puede presentar su formulación en el proceso de resolución por parte de los estudiantes. Estas deficiencias se ponen de manifiesto también cuando los FM consideran como única fuente de error en Luis la respuesta rápida y carente de reflexión, sin observar que la pregunta se puede interpretar tanto de forma absoluta (comparación entre las cantidades totales de lectores en cada curso) como relativa (comparación entre las razones de alumnos lectores a totales en ambos cursos). También, se reconoce un conocimiento matemático y didáctico deficiente cuando los FM afirman que las operaciones que realiza María sólo darían una respuesta adecuada si hubiera el mismo número de alumnos en cada clase. En este caso, además, consideran que Juan sí observa este hecho y que por tanto es el más acertado (Juan "corrige" a su compañera, aunque no haya terminado de concluir una solución). Los FM no identifican detrás de la estrategia de María la posibilidad de obtener la respuesta al problema, no le dan sentido y las consideran "al azar" o "sin sentido" ("le sale un número que no indica nada", FM129). Para superar la resistencia a considerar la multiplicidad de planteamientos de los alumnos y reconocer su capacidad global (Buforn *et al.*, 2020), es necesario desde la formación de profesores no sólo insistir y reforzar la flexibilidad de los futuros docentes para resolver problemas, sino también para ver las oportunidades de aprendizaje en las estrategias menos eficientes de los alumnos.

Cuando los FM analizan las respuestas de estudiantes a una tarea matemática, muestran sus conocimientos matemáticos y su competencia para discernir la información matemática relevante al interpretar el pensamiento matemático. Así, que los FM consideren que la respuesta de Luis no es buena porque no ha realizado ninguna operación aritmética para calcular la solución, es muestra de que para los FM el aspecto operacional sigue siendo determinante para reconocer el pensamiento matemático de los alumnos y decidir lo que consideran apropiado o no. También se observa que al analizar la intervención de Juan los FM "encajan" su respuesta en lo que ellos habrían realizado para llegar hasta ella, asegurando lo que este alumno ha hecho ("Este alumno ha llegado a la respuesta correcta ya que lo que ha hecho ha sido obtener el mínimo común múltiplo antes de realizar cualquier operación", FM22).

Estos resultados muestran la importancia de implementar este tipo de acciones formativas para desarrollar la competencia mirada profesional en los futuros docentes. En particular, de ofrecer a los FM oportunidades durante su formación de analizar la actividad matemática de los alumnos y de reforzar el papel del discurso matemático como medio para reconocer el pensamiento matemático de los alumnos más allá de lo que muestran los procedimientos (habituales o no) en la solución de un problema.

Nuestro trabajo contribuye a la creciente investigación interesada en cómo futuros maestros reconocen el razonamiento de los estudiantes en uno de los componentes esenciales del razonamiento proporcional, la comparación de razones, y en qué manera tienen en cuenta elementos matemáticos esenciales: la distinción entre comparación relativa/absoluta y el significado de la razón como relación entre cantidades. La investigación previa muestra cierta desconexión entre el conocimiento de los procedimientos implicados en el razonamiento proporcional, por ejemplo, la razón como la división de dos cantidades, y los significados de la razón no directamente vinculados con procedimientos, por ejemplo, la razón como índice comparativo en el pensamiento relacional (Buforn *et al.,* 2018), por lo que creemos que es un contexto importante en el que es conveniente seguir investigando.

Finalizamos indicando algunas limitaciones de nuestro trabajo que será necesario tener en cuenta en futuras investigaciones: Dado que algunas de las descripciones fueron poco concluyentes, habría sido conveniente complementar la intervención con entrevistas y sesiones posteriores de puesta en común en las que los FM hubieran discutido las razones detrás de su valoración de las respuestas de los alumnos. Por otro lado, es posible que los resultados de nuestra investigación hubieran sido mejores si los FM hubiesen resuelto el problema previamente y reflexionado sobre las potenciales dificultades tanto del problema, como desencadenante de la actividad matemática, como de sus propias estrategias de resolución. Esto nos habría permitido además conocer su conocimiento matemático y didáctico-matemático (en las facetas epistémica y cognitiva) del razonamiento proporcional.

Agradecimientos

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación, PID2019-105601GB-I00/AEI/0.13039/501100011033, con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

Referencias

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B., y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 57-79. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9205-4

Ben-Chaim, D., Keret, Y., y Ilany, B. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Sense Publisher. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-784-4

Buforn, A., Llinares, S., y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestros españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 23,* 229-251. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Buforn, A., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A., y Brown, L. (2020). Pre-service teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 1–9. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333

Burgos, M., y Godino J. D. (2022a). Assessing the Epistemic Analysis Competence of Prospective Primary School Teachers on Proportionality Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 367–389. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0.

Burgos, M., y Godino, J. D. (2022b). Prospective Primary School Teachers' Competence for the Cognitive Analysis of Students' Solutions to Proportionality Tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 42*(2), 1-30. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00193-4

Chapman, O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. En J. J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02562-9_16

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. Routledge.

Depaepe, F., Verschaffel, L., y Star, J. (2020). Expertise in developing students' expertise in mathematics: Bridging teachers' professional knowledge and instructional quality. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 52*(2), 179-192. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01148-8

Fernández, C., Llinares, C., y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM. Mathematics Education, 44,* 747-759. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0425-y

Fernández, C., Llinares, S., y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1), 441-468. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1274

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development, and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 39-61. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Gómez, B., y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XVIII* (pp. 375-384). SEIEM.

Hilton, A., y Hilton, G. (2019). Primary school teachers implementing structured mathematics interventions to promote their mathematics knowledge for teaching proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*, 545-574. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9405-7

Izsák, A., y Jacobson, E. (2017). Preservice teachers' reasoning about relationships that are and are not proportional: A knowledge-in-pieces account. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(3), 300-339. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.48.3.0300

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S., y Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: Using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(11), em1599. https://doi.org/10.29333/ejmste/93421

Jacobs, V. R., Lamb, L. C., y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M., y Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *19*(3-4), 135-150.

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning: toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). NC: Information Age Publishing.

Mason, J. (2016). Perception, interpretation and decision making: understanding gaps between competence and performance-a commentary. *ZDM, 48*(1-2), 219-226. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0764-1

Nagar, G. G., Weiland, T., Brown, R. E., Orrill, C. H., y Burke, J. (2016). Appropriateness of proportional reasoning: Teachers' knowledge used to identify proportional situations. En M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil, y J. A. Eli (Eds.), *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 474–481). University of Arizona.

Ponte, J. P., y Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 275-296). Routledge.

Riley, K. J. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. En P. Brosnan, D. B. Erchick y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 6, pp. 1055-1061). Ohio State University.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., y Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17(*1), 153–172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Simpson, A., y Haltiwanger, L. (2017). This is the first time I've done this: Exploring secondary prospective mathematics teachers' noticing of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(4), 335–355. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9352-0

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: Ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, *84*, 49-70. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9475-5

Weiland, T., Orrill, C., Brown, R., y Nagar, G. G. (2019). Mathematics teachers' ability to identify situations appropriate for proportional reasoning. *Research in Mathematics Education, 21*(3), 233-250. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1579668