Universidad de Oviedo

Aula Abierta

Volumen 53, número 2, abril-junio, 2024/págs. 199-207

¿Cómo resuelven futuros maestros tareas de proporcionalidad en el contexto probabilístico? Mirada desde los niveles de razonamiento algebraico

María Burgos Navarro
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada
Mail: mariaburgos@ugr.es
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4598-7684

Nicolás Tizón-Escamilla
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada
Mail: tizon@ugr.es
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3221-7928

María del Mar López-Martín
Departamento de Educación
Universidad de Almería
Mail: mdm.lopez@ual.es
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8677-9606

Carmen Gloria Aguayo-Arriagada
Departamento de Educación
Universidad de Almería
Mail: cgaguayo@ual.es
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9576-2312

RESUMEN

Diversas investigaciones señalan las carencias en el razonamiento probabilístico de futuros docentes y su conexión con un razonamiento proporcional deficiente. Estas limitaciones pueden estar relacionadas además con el grado de algebrización de la actividad matemática implicada. Con la intención de arrojar algo de luz al respecto, en este estudio, se analizan las respuestas de un grupo de maestros en formación a una tarea que requiere determinar la composición de una urna, cuya probabilidad de éxito es igual que en otra en la que se conoce la razón entre casos favorables y desfavorables. Se examinan las estrategias y errores que presentan, centrándonos en los niveles de razonamiento algebraico de sus prácticas matemáticas. Los resultados muestran que los futuros docentes determinaron con éxito la composición de la urna empleando estrategias mayoritariamente de tipo aritmético, y que encontraron dificultades para argumentar sus soluciones. Estas dificultades fueron menores a medida que las soluciones mostraban rasgos de razonamiento proto-algebraico.

Palabras claves: formación de profesores, probabilidad, razonamiento algebraico, razonamiento proporcional, urnas.

How do prospective teachers solve proportionality tasks in the probabilistic context? A look from the levels of algebraic reasoning

ABSTRACT

Various studies point out the deficiencies in the probabilistic reasoning of prospective teachers and their connection to poor proportional reasoning. These limitations may also be related to the algebraization degree of the mathematical activity involved. To shed some light on this matter, in this study, the responses of a group of pre-service teachers to a task that requires determining the composition of an urn, with the same probability of success as another urn in which the ratio between favourable and unfavourable cases is known, are analyzed. The strategies and errors they present are examined, focusing on the levels of algebraic reasoning in their mathematical practices. The results show that future teachers successfully determined the composition of the urn using predominantly arithmetic strategies and encountered difficulties in justifying their solutions. These difficulties decreased as the solutions exhibited characteristics of proto-algebraic reasoning.

Keywords: teacher education, probability, algebraic reasoning, proportional reasoning, urns.

ISSN: 0210-2773
DOI: https://doi.org/10.17811/rifie.19972

1. Introducción

Numerosos autores destacan la importancia de iniciar la enseñanza de la probabilidad desde los primeros niveles educativos, aprovechando las intuiciones de los escolares y avanzando hacia la expresión, cuantificación y modelización de la incertidumbre por medio de la probabilidad (Pratt y Kazak, 2018). Esta necesidad ha motivado que programas curriculares de diversos países, como Australia (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA], 2014), Estados Unidos (Common Core State Standards Initiative [CCSSI], 2015), Singapur (Ministry of Education Singapore, 2012) y España (Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP], 2022) hayan incluido el estudio de la probabilidad en la Educación Primaria. Esta incorporación plantea un importante desafío para los docentes de estas etapas educativas que no siempre disponen de la formación matemática y didáctica necesaria (Franco y Alsina, 2022a, 2022b; Vásquez y Alsina, 2017).

El *razonamiento probabilístico* entendido como aquel que se aplica al resolver problemas de probabilidad requiere entre otras capacidades: comprender las ideas probabilísticas fundamentales de variabilidad, aleatoriedad, independencia o predictibilidad/incertidumbre; calcular o estimar probabilidades de sucesos en situaciones aleatorias cotidianas; utilizar adecuadamente el lenguaje del azar y emplear argumentos para probar la veracidad de una afirmación probabilística o la validez de la solución al problema (Sánchez y Valdez, 2017). Investigaciones recientes muestran que tanto estudiantes como futuros profesores comparten numerosos sesgos en el razonamiento probabilístico (Batanero *et al.*, 2014; Batanero *et al.*, 2015; Gómez *et al.*, 2013). Además, revelan que detrás de gran parte de los errores en el ámbito de la probabilidad, puede encontrarse un razonamiento proporcional insuficiente (Begolli *et al.*, 2021; Bryant y Nunes, 2012; Langrall y Mooney, 2005; Van Dooren, 2014). El *razonamiento proporcional*, entendido como la habilidad de establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y de extender dicha relación a otro par de cantidades (Lamon, 2007), involucra un sentido de covariación y de comparaciones múltiples en términos relativos. Por estas características, se le considera un elemento esencial del razonamiento probabilístico, que forma parte del análisis del espacio muestral, de la cuantificación proporcional de las probabilidades y de la comprensión y uso de las correlaciones (Bryant y Nunes, 2012).

Diversos estudios han investigado las estrategias y dificultades encontradas por estudiantes de distintas edades y futuros maestros en resolución de tareas de comparación de probabilidades en contexto de urnas (Batanero *et al.*, 2015; Hernández-Solís *et al.*, 2021a). Para Hernández-Solís *et al.* (2021a) la dificultad encontrada por estudiantes en el cálculo de probabilidades se debe a que no es frecuente utilizar el contexto de probabilidad para completar su estudio de fracciones y realizar comparaciones. Son menores los trabajos en relación con la noción de espacio muestral (Hernández-Solís *et al.*, 2021b; Ortiz y Mohamed, 2014; Shaughnessy y Cincetta, 2002). En el contexto de maestros en formación, Ortiz y Mohamed (2014) observan que las dificultades de comprensión del espacio muestral pueden venir motivadas por un conocimiento insuficiente con relación al suceso seguro, la falta de razonamiento combinatorio, o la interpretación incorrecta del experimento aleatorio. Con estudiantes de primaria, Hernández-Solís *et al.* (2021b) resaltan que la mayoría de los participantes construyen un espacio muestral adecuado cuando en el enunciado de las tareas se parte de un suceso posible o de uno equiprobable, pero presentan dificultades cuando el suceso es imposible o seguro debido a una falta de comprensión de ambos tipos de sucesos.

En la presente investigación, se propone una tarea en la que maestros en formación deben determinar la composición de una urna (con número de casos posibles conocido) para que la probabilidad de éxito sea la misma que en otra donde no se conoce la composición, pero sí la razón entre casos favorables y desfavorables. El interés de esta tarea es conectar dos componentes esenciales del razonamiento probabilístico: la identificación de la naturaleza proporcional del cálculo de probabilidades y la comprensión del espacio muestral. Puesto que la resolución de tareas matemáticas se puede hacer con diversos grados de formalización, se analiza la actividad matemática de los maestros en formación en términos de los tipos de representaciones usadas, procesos de generalización y cálculo analítico implicados, esto es, en función del carácter algebraico de la actividad matemática correspondiente (Godino *et al.*, 2014). Teniendo en cuenta estas ideas, los objetivos de esta investigación son los siguientes:

- Analizar las estrategias utilizadas por maestros en formación para determinar la composición de una urna con igual probabilidad de éxito que otra. De la primera se conoce la razón entre casos favorables y desfavorables y de la segunda sólo el número de casos posibles.
- Identificar las formas de razonamiento algebraico y probabilístico que emergen de las prácticas matemáticas desarrolladas por los participantes al resolver dicha tarea.
- Analizar la relación entre el grado de éxito en la resolución de la tarea y el nivel de algebrización alcanzado en la misma.

Pese a la carencia de estudios previos en el contexto probabilístico, los resultados obtenidos en investigaciones anteriores que analizan la conexión entre el razonamiento proporcional y algebraico (Burgos y Godino, 2022) nos llevan a esperar encontrar formas proto-algebraicas en la actividad matemática de los futuros maestros. Estas investigaciones también sugieren que el éxito en la resolución será mayor, cuanto mayor sea el grado de razonamiento algebraico emergente.

En la Sección 2 se introducen los elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino *et al.*, 2007). El papel esencial dado por el EOS a las nociones de práctica matemática y significado pragmático, así como el modelo de razonamiento algebraico elemental que propone para analizar la actividad matemática, nos permiten afrontar los objetivos de nuestra investigación. La Sección 3 describe la metodología empleada, los participantes, el instrumento de recogida de datos y su análisis a priori. Los resultados del análisis y evaluación de las respuestas elaboradas por los participantes se presentan en la Sección 4. Finalmente, se discuten los resultados y derivan algunas implicaciones didácticas.

2. Marco teórico

2.1. Prácticas matemáticas y significado pragmático

En el EOS se entiende por *práctica matemática* toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas. Las prácticas matemáticas pueden ser concebidas desde dos puntos de vista, dependiendo de quién las realiza; si son llevadas a cabo por una persona, se pondrán en evidencia los *significados personales*, o bien, si son compartidas en el seno de una institución, darán lugar a los *significados institucionales*, entendiendo por institución un grupo de personas expertas involucradas en una misma situación problemática (Godino *et al.*, 2007).

En el EOS, el término *objeto* se usa en sentido amplio para referir a cualquier entidad que esté involucrada de alguna forma en la práctica o sistemas de prácticas matemáticas y que pueda separarse o individualizarse. Atendiendo a su función y naturaleza en dichas prácticas se identifican: lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros, situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas que motivan la actividad, ejercicios), conceptos (introducidos mediante definiciones o descripciones), proposiciones (enunciados sobre conceptos), procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo) y argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos). Estos objetos primarios emergen de los sistemas de prácticas mediante los respectivos *procesos matemáticos* de comunicación, problematización, definición, enunciación, algoritmización y argumentación.

Los objetos y procesos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas se relacionan entre sí formando *configuraciones ontosemióticas* que pueden ser *epistémicas* (*institucionales*) —redes de objetos y procesos que intervienen y emergen de las prácticas necesarias para resolver un tipo de tareas matemáticas— o *cognitivas* (*personales*)—redes de objetos y procesos matemáticos que ponen en juego los estudiantes para resolver un tipo de tareas matemáticas— (Godino *et al.*, 2007).

2.2. Razonamiento algebraico elemental

Desde el EOS se entiende el *razonamiento algebraico elemental* (RAE) como el sistema de prácticas operativas y discursivas que se utilizan en la resolución de tareas matemáticas abordables desde la Educación Primaria, en las que están presentes objetos y procesos algebraicos. Godino *et al.* (2014) consideran como tipos de objetos algebraicos: *relaciones binarias* —de equivalencia o de orden— y sus respectivas propiedades (reflexiva, transitiva y simétrica o antisimétrica), usadas para obtener nuevos objetos matemáticos; *operaciones y sus propiedades*, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos; *funciones, sus componentes* (variables, representaciones analítica, tabular o gráfica), *tipos, operaciones y propiedades*; *estructuras* (semigrupo, grupo, anillo, cuerpo, espacio vectorial), *sus tipos y propiedades*. El modelo de RAE propuesto en Godino *et al.* (2014) para la Educación Primaria establece criterios que permiten identificar la actividad matemática puramente aritmética (nivel 0 de RAE) y distinguirla de progresivos niveles de RAE. El carácter algebraico de una práctica matemática está esencialmente ligado al reconocimiento por el sujeto que la realiza de la regla que conforma el objeto intensivo (inferencia de la generalidad), la consideración de la generalidad como una nueva entidad unitaria (unitarización) y su materialización mediante cualquier registro semiótico (representación) para su posterior tratamiento analítico (transformación). Así, los criterios para delimitar los distintos niveles están basados en: tipos de representaciones usadas, procesos de generalización implicados y cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente.

— Nivel 0. Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad, usando lenguajes natural, numérico, icónico, gestual.
— Nivel 1. Se usan objetos intensivos de segundo grado de generalidad, propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia.
— Nivel 2. Se usan representaciones simbólico – literales para referir a los objetos intensivos reconocidos, los cuales están ligados a la información espacial y contextual; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = C$ (A, B, C $\in$ R). En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.
— Nivel 3. Los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información contextual. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = Cx + D$ (A, B, C, D $\in$ R).

Puesto que los números naturales son entidades abstractas que emergen de colecciones de objetos perceptibles y de las acciones que se realizan con ellos, es necesario atribuirles un primer grado de intensión. Así, en el nivel 0 de RAE no se puede decir que no intervengan objetos intensivos, sino que a tales objetos corresponde un primer grado de intensión. Por ello, la atribución de un carácter algebraico a una práctica matemática supone la intervención de intensivos de al menos un segundo grado (clases de intensivos de grado 1). Los niveles 1 y 2 se consideran como proto-algebraicos para distinguirlos del nivel 3, cuyos rasgos indican una actividad algebraica consolidada.

Aunque la intención inicial del modelo de los niveles de algebrización propuesto por Godino *et al.* (2014) es la descripción del tipo de razonamiento algebraico que se pone en juego en la resolución de tareas matemáticas específicas desde el punto de vista epistémico, es posible aplicar dicho modelo para analizar el carácter de la actividad matemática de estudiantes cuando resuelven problemas, en particular aquellos que involucran el razonamiento proporcional o probabilístico. En Burgos *et al.* (2022) se aplica el modelo de RAE para mostrar la progresión de la actividad matemática desde los niveles aritméticos y proto-algebraicos, a los niveles más elevados de formalización en el estudio de la probabilidad en su significado clásico. En nuestro trabajo, el modelo se aplica, en primer lugar, a las prácticas expertas, con la intención de mostrar la potencial complejidad ontosemiótica implicada y, en segundo lugar, a las prácticas de maestros en formación, para analizar el grado de generalidad y formalización mostrado.

3. Método

3.1. Enfoque metodológico

La presente investigación tiene un carácter cualitativo ya que pretende indagar sobre el conocimiento que poseen maestros en formación en tareas de probabilidad. Para analizar la actividad matemática desarrollada por los participantes en la resolución de la tarea aplicamos el análisis ontosemiótico (Godino, 2002; Godino *et al.*, 2022) que consiste en:

1. Descomposición de la actividad en unidades de análisis, formadas por las prácticas operativas o discursivas elementales, en las que se puede identificar una función o papel en la actividad que se analiza.
2. Identificación de la intencionalidad de las prácticas elementales.
3. Reconocimiento de los objetos y procesos asociados a las prácticas elementales.

3.2. Contexto de la investigación, participantes y recogida de datos

En esta experiencia han participado un grupo de 63 maestros en formación (MF en lo que sigue) durante el curso académico 2021-2022. Para la recopilación de datos se empleó una tarea incluida en la prueba de evaluación de una asignatura de primer semestre centrada en los contenidos matemáticos de Educación Primaria. Al finalizar el curso, los MF deben conocer y relacionar los principales conceptos, estructuras y procedimientos que conforman los temas de las matemáticas escolares (en particular, estudiaron proporcionalidad y probabilidad), enunciar, formular y resolver problemas matemáticos mediante diferentes estrategias en diversas situaciones y contextos, y utilizar modelos gráficos y simbólicos para expresar relaciones, propiedades y operaciones matemáticas.

3.3. Instrumento de recogida de datos y análisis a priori

En este apartado se presenta el análisis de la tarea de evaluación, que servirá de referencia para interpretar las respuestas dadas por los participantes. Se trata de un problema en el que la composición de una urna debe obtenerse de forma que la probabilidad de éxito sea la misma que en otra urna en la que la razón entre casos favorables y desfavorables es conocida.

> *Enunciado*: Disponemos de dos cajas, la caja A y la caja B, que contienen, ambas, bolas blancas y bolas negras. En la caja A por cada bola blanca hay tres bolas negras. En la caja B hay 20 bolas (entre negras y blancas). ¿Cuántas bolas hay de cada color en la caja B si es igual de probable sacar una bola blanca que en la caja A? Explica tu respuesta.

A continuación, se muestran estrategias de solución asociadas a los diferentes niveles de RAE.

Solución 1. Aritmética (nivel 0 RAE)

> En la caja A, por cada bola blanca hay tres negras, de manera que, si hubiese 4 bolas, una sería blanca. Puesto que la probabilidad es el cociente entre el número de casos favorables (bolas blancas) y el de casos posibles (bolas totales), para que sea igual de probable sacar bola blanca en la caja B que en la caja A, se debe mantener la razón entre bolas blancas y bolas totales. Dado que hay 20 bolas en total en la caja B, se pueden formar 5 grupos de 4 bolas, pues . En cada uno de estos grupos, debe haber 1 bola blanca y 3 bolas negras. Como son 5 grupos, esto supone un total de 5 (bolas blancas en la caja B. El resto, 15=20-5, serán bolas negras.

En esta solución (semejante a la de "división por la razón" en Ben-Chaim *et al.*, 2012) intervienen valores numéricos particulares y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores. La igualdad tiene significado de resultado de una operación. Por tanto, según Godino *et al.* (2014), la actividad matemática realizada se considera de nivel 0 de RAE. En esta estrategia, el resolutor reconoce la razón dada y establece la relación multiplicativa que existe entre casos favorables y desfavorables. Debe comprender que la razón "por cada bola blanca hay tres bolas negras" describe una situación en la que, en el caso particular en que dicha caja tuviera 4 bolas, una de ellas sería blanca y las otras tres serían negras. Además, debe asumir que esta relación se mantiene tanto para la cantidad total de bolas en la caja B como para cada grupo dentro de esta. Así, determina cuántos grupos hay en el total, llegando a la conclusión de que éstos son 5 (20:4). Dado que cada grupo mantiene la razón 1:3, el total es de 5 bolas blancas (5 grupos con una bola blanca cada uno). El resto serán bolas negras.

Solución 2. Parte-todo (nivel 1 RAE)

> Para que sea igual de probable sacar una bola blanca en la caja B que en la caja A se debe mantener la razón de bolas blancas (casos favorables) respecto del total de bolas (casos posibles). Dado que esta razón es de una bola blanca por cada cuatro bolas, y en la caja B hay 20 bolas, el número de bolas blancas en la caja B es . El resto de las bolas en la caja B, esto es, 2 serán negras.

La actividad matemática en esta solución (semejante a la de "parte-todo" en Ben-Chaim *et al.*, 2012) se considera de nivel 1 RAE: se declara una relación general, a saber, la razón de entre los casos favorables y posibles que se enuncia con lenguaje natural; intervienen números racionales (intensivos de segundo grado); por medio del significado como operador de la fracción; se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores.

Solución 3. Valor faltante (nivel 2 RAE)

> Se desconoce el número de bolas blancas y negras que hay en la caja A, pero dado que por cada bola blanca hay tres negras, la razón entre los casos favorables y posibles en A es de 1 a 4. Puesto que los sucesos elementales son equiprobables, es posible aplicar la regla de Laplace. De esta manera, la igualdad de probabilidad entre ambas cajas establece la proporción:

$$\frac{\text{Casos favorables en A}}{\text{Casos favorables en A}} = \frac{\text{Casos favorables en B}}{\text{Casos posibles en B}}$$

> donde son conocidos la razón de casos favorables y posibles en A y el número exacto de casos posibles en B, y se desconoce el número, de casos favorables en B. Por tanto, esta proporción se expresa como. En una proporción, como equivalencia de fracciones, el producto de los extremos es igual al producto de medios. Así, $x = (1{\times}20)4 = 5$. Es decir, en la caja B hay 5 bolas blancas y el resto, son negras.

La solución de un problema de valor faltante, basada en el uso de las razones y proporciones, involucra una incógnita y el planteamiento de una ecuación. La actividad que se realiza es de nivel 2 RAE, según el modelo de Godino *et al.* (2014), ya que la incógnita aparece despejada en un miembro de la ecuación que se establece mediante la proporción. Con esta estrategia, es preciso identificar las cantidades involucradas y reconocer la relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes: número de casos favorables y número de casos posibles. Se debe explicitar la igualdad de razones de cantidades que se corresponden y la igualdad de productos cruzados en una proporción para despejar el valor desconocido.

Solución 4. Formal/algebraica (nivel 3 de RAE)

> Para que sea igual de probable sacar una bola blanca en la caja B que en la caja A se debe mantener la razón entre bolas blancas (casos favorables) y bolas negras (casos desfavorables): Por tanto, esta proporción queda , siendo el número de bolas blancas en B, e el número de bolas negras en B. Además, como hay 20 casos posibles en B, luego la proporción anterior se escribe de manera equivalente como, En una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de medios, luego Finalmente, Es decir, en la caja B hay 5 bolas blancas y el resto, son negras.

En la solución previa, se emplea el lenguaje simbólico-literal, se utiliza una técnica de sustitución y se opera de manera analítica/sintáctica para transformar la ecuación proporcional en una ecuación en la que la incógnita aparece en ambos términos de ésta. Se trata de una actividad propiamente algebraica, nivel 3 de RAE según Godino *et al.* (2014).

3.4. Categorización

Aplicamos el análisis ontosemiótico de contenido (Godino, 2002) para examinar las respuestas de los MF a la tarea de evaluación. Este análisis nos permite, por un lado, clasificar las estrategias seguidas por los MF según el nivel de RAE, es decir, conforme a la naturaleza algebraica de los objetos y procesos implicados (de manera similar a como se ha mostrado en la Sección 3.3 para soluciones expertas). Por otro lado, nos posibilita categorizar sus soluciones en función del grado de corrección (si obtiene la composición de manera correcta o no, si justifica o no y cómo de adecuada es su explicación cuando lo hace).

En el proceso de determinación de estas categorías, parte del equipo investigador analizó de manera independiente las respuestas de los participantes. Después contrastaron las categorías obtenidas y, en caso de discrepancias, se revisaron de manera conjunta las producciones que generaban dudas.

Se encontraron las siguientes categorías de respuestas:

— *Determina incorrectamente el número de bolas blancas y negras*. En este caso, asumieron que el número de bolas blancas en la caja A es 4, o interpretaron la razón 1:3 como la probabilidad de obtener bola blanca en la caja A (lo que los llevaba a "redondear" y considerar 6 bolas blancas y 14 negras en la caja B).
— *Determina correctamente el número de bolas blancas y negras, pero no lo justifica* (CNJ) *o lo hace de manera no adecuada*. En las respuestas de los MF que justifican el procedimiento seguido para obtener la composición de la caja B, pero no lo hacen de forma adecuada, se distinguen:
  — Los que *justifican de manera incorrecta la solución* (CJI). En este caso siguieron una explicación de tipo procedimental (por ejemplo, MF56 indicó "si multiplicamos 5x3 y le sumamos 5 salen 20"), un argumento por comprobación *a posteriori* de la igualdad de probabilidad ("porque en las dos cajas la probabilidad es la misma ", MF44), o consideraron imprescindible que en ambas cajas hubiera el mismo número de bolas (por ejemplo, MF20 indicó "que sea igual de probable sacar una bola blanca en ambas cajas, significa que ambas cajas tienen las mismas bolas, es decir, 20 bolas").
  — Los que *justifican de forma parcialmente correcta* (con algún error o de forma incompleta) *la solución* (CJP). En esta categoría, los MF si bien se basan en la definición de probabilidad o la idea de razón, no argumentan adecuadamente cuál es la relación entre la distribución de bolas de un tipo u otro y que la probabilidad de sacar bola blanca en ambas cajas sea la misma. Por ejemplo, MF58 indica "La probabilidad de sacar bola blanca en B es de 1/4, luego la cantidad de bolas blancas debe ser 1/4 de 20".
  — *Determina y justifica correctamente el número de bolas blancas y negras* (CJC), conectando explícitamente la relación de proporcionalidad entre los casos favorables y desfavorables (o favorables y posibles) y la igualdad de probabilidad de éxito en las cajas. Por ejemplo, MF7 justifica su solución como sigue: "Si hay la misma probabilidad en la caja A que en la B de sacar una bola blanca, debe mantenerse la proporción de que por cada bola blanca hay 3 negras".

4. Resultados

En esta sección, se presentan los resultados obtenidos por los MF en la resolución del problema. Se analiza: a) el grado de éxito en su solución y justificación, en particular, el reconocimiento del carácter proporcional de la comparación de probabilidades (Bryant y Nunes, 2012) y el uso de argumentos probabilísticos para validar su respuesta (Sánchez y Valdez, 2017), b) el nivel de RAE implicado y c) cómo se relaciona con el grado de pertinencia de la respuesta.

De los 63 MF que participaron en la experiencia, cuatro no resolvieron el problema y, por tanto, no se han tenido en cuenta en el análisis. La Tabla 1 muestra la frecuencia de respuestas en cada una de las categorías encontradas según aparecen en la Sección 3.4. Si bien la mayoría de los participantes identificaron correctamente la composición de bolas de la caja B, tuvieron dificultades para justificar adecuadamente la validez de su procedimiento. De manera específica, de los 55 MF que resolvieron correctamente el problema, siete no ofrecieron ninguna justificación, es decir, no había ningún discurso que acompañara a las operaciones que les condujeron a la solución. Aquellos que sí justificaron su solución, pero lo hicieron de manera incorrecta, usaron una descripción de las operaciones seguidas o consideraron imprescindible que en ambas cajas hubiera el mismo número de bolas.

Tabla 1.
Categorías según grado de pertinencia y frecuencia (n=59). Elaboración propia.

Categorías	Fr. (%)
Incorrecta	4 (6,78)
CNJ. Determina correctamente el número de bolas blancas y negras, pero no justifica	7 (11,86)
CJI. Obtiene correctamente el número de bolas blancas y negras, pero justifica incorrectamente	16 (27,12)
CJP. Determina correctamente el número de bolas blancas y negras, pero lo justifica de manera parcialmente correcta	24 (40,68)
CJC. Determina y justifica adecuadamente el número de bolas blancas y negras	8 (13,56)

Las justificaciones parcialmente correctas, no relacionaron adecuadamente la distribución de bolas de un tipo u otro y que la probabilidad de sacar bola blanca en ambas cajas sea la misma. Esto es, no conectaron completamente los elementos del razonamiento probabilístico implicado: el espacio muestral, la relación de proporcionalidad y la igualdad de probabilidades (Bryant y Nunes, 2012; Sánchez y Valdez, 2017).

En la Tabla 2 se resumen los distintos tipos de estrategias de resolución según los niveles de RAE empleados por los MF que resolvieron correctamente el problema.

Tabla 2.
Tipos de estrategia correcta y frecuencia (Fr) según niveles de RAE (n=55). Elaboración propia.

RAE	Tipo de estrategia	Fr. (%)
Nivel 0	Reparto aditivo/diagramático/icónico.	18 (32,73)
	División por la razón.	12 (21,82)
Nivel 1	Relación de proporcionalidad entre o dentro de las magnitudes.	4 (7,27)
	Fracción (casos favorables/posibles) como operador.	13 (23,64)
Nivel 2	Ecuación proporcional (casos favorables/posibles).	8 (13,56)

Se observa que más de la mitad de las soluciones corresponden a prácticas matemáticas de carácter aritmético (nivel 0 de RAE; ver Figuras 1 y 2) y no hubo estrategias de resolución propiamente algebraicas (nivel 3 de RAE). Además, destaca el hecho de que casi un tercio de las respuestas se clasificaron en el nivel 1 de RAE. La mayoría de estas respuestas utilizaron estrategias basadas en el concepto de fracción como operador (ver Figura 3), siendo escaso el uso de la razón, característico del nivel proto-algebraico (Figura 5) en tareas que involucran razonamiento proporcional (Burgos y Godino, 2020).

En la Tabla 3, se relaciona el nivel de razonamiento algebraico y la pertinencia en la justificación de las soluciones dadas. En las soluciones de reparto aditivo, las más frecuentes, los MF distribuyen 4 bolas asignándoles el color blanco a una de ellas y el color negro a las otras tres, repitiendo este proceso hasta completar las 20 bolas de la caja B. Además del soporte icónico, los MF realizan el reparto de manera aditiva (1+3, 1+3, ...), asignándoles letras (B a cada bola blanca, N a cada bola negra), o bien completando la distribución en una tabla con tres filas, una para el número de bolas blancas, otra para el número de bolas negras y una tercera para el número de bolas totales "acumuladas" en la asignación (véase la Figura 1). La tabla en este caso aparece únicamente como medio de recuento y no muestra ningún aspecto funcional, por lo que no hay rasgos proto-algebraicos en su uso.

Tabla 3.
Pertinencia en la justificación según niveles de RAE (n=55). Elaboración propia.

	Justificación				
RAE	CNJ	CJI	CJP	CJC	Total
Nivel 0	5	11	12	2	30
Nivel 1	0	5	10	2	17
Nivel 2	0	0	4	4	8
Total	5	16	26	8	55

En algunos casos, los MF obtuvieron la composición de la caja B por reparto icónico o por medio del registro tabular sin justificar cómo, y *a posteriori* comprobaron que, con la composición obtenida, se logra la misma probabilidad (o "posibilidad", como indica MF54, Figura 1), aun no habiéndola determinado previamente, por lo que la justificación no se consideró correcta.

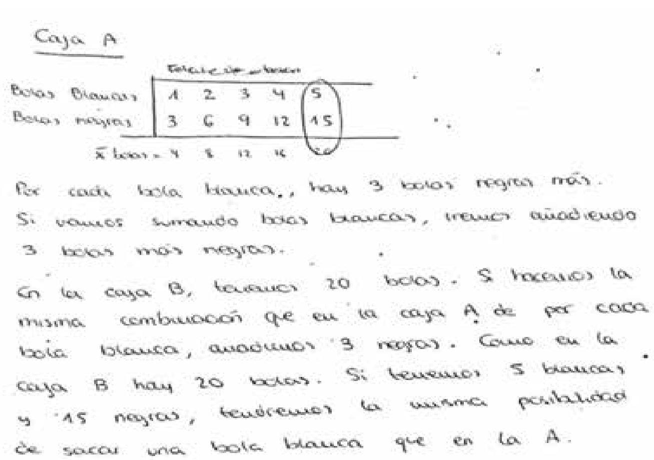

Figura 1. Solución aditiva (nivel 0 RAE) con apoyo tabular (MF54). Justificación por comprobación *a posteriori* de la probabilidad.

Las soluciones que recurren a la división por la razón son similares a la desarrollada por MF12 en la Figura 2 y muestran cierta similitud con la Solución 1 del análisis previo.

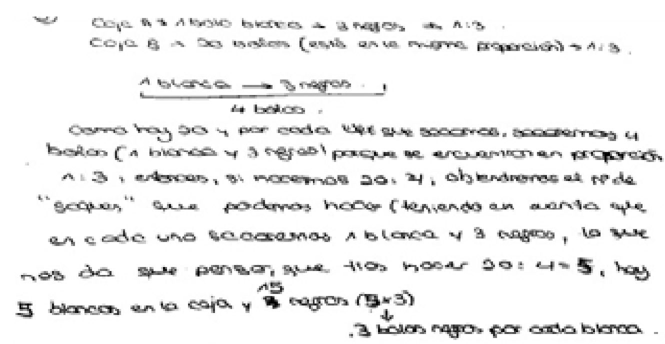

Figura 2. Solución división por la razón (nivel 0 RAE) y justificación parcial (MF12).

Los MF justificaron la validez del procedimiento en 25 de las 30 soluciones de tipo aritmético. En particular, once de esas soluciones (CJI) se basaron únicamente en la idea de "repetibilidad" de los grupos de 4 en un total de 20 bolas ("En la caja B aplicamos el mismo patrón que en la caja A, pero con las 20 bolas", MF50), sin mencionar explícitamente la probabilidad o la idea de razón. En los demás casos, se establece la relación entre la probabilidad y la razón ("la misma probabilidad implica que se mantiene la razón 1/3 que se mantiene en cada uno de los 5 grupos de 4 bolas", MF46), aunque sólo en tres casos se determina explícitamente la probabilidad de éxito.

En cuanto a las soluciones de nivel proto-algebraico, predominan principalmente estrategias parte-todo próximas a la ejemplificada en la Solución 2 del análisis a priori. Sin embargo, los MF no argumentan de forma completa (categoría CJP) por qué si la probabilidad de sacar una bola blanca en B es de , el número de bolas blancas se determina calculando de las 20 bolas, es decir, no vinculan la probabilidad y la razón de reparto en este cálculo. En tres de las soluciones de este tipo, los MF expresan de manera general y simbólica la probabilidad en término de las cantidades indeterminadas de bolas blancas y negras de la caja A (Figura 3).

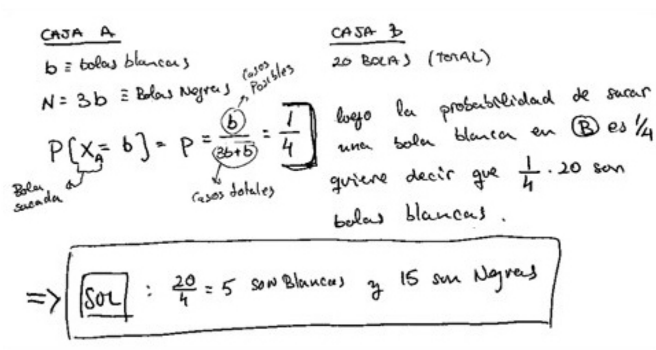

Figura 3. Solución parte-todo (nivel 1 de RAE) y justificación incompleta (MF57).

Como se observa en la Figura 3, MF57 reconoce el carácter indeterminado del número de bolas blancas, *b*, en la caja A y determina a partir de la razón "por cada bola blanca hay tres bolas negras", la relación entre este y el número de bolas negras, 3*b*, en dicha caja. Expresa la probabilidad en términos de estas cantidades y opera de manera sintáctica con ellas para reducirla al valor .

Este tratamiento sintáctico-analítico indica rasgos de razonamiento algebraico superior. Sin embargo, una vez obtenida esta probabilidad se aplica el significado de operador de la fracción para determinar el número de bolas blancas en B.

La relación de proporcionalidad entre el número de bolas blancas y el número de bolas negras (o totales) se hace explícita en otras soluciones, como la desarrollada por MF7 (Figura 4), en las que el uso de la tabla permite identificar la propiedad escalar (mediante flechas y el factor por el que se multiplica) de las magnitudes proporcionales. También introduce cierta generalidad, pues admite la posibilidad de prolongar la secuencia de números proporcionales, emergiendo un intensivo de segundo grado. Se considera que esta actividad es propia de un nivel 1 de RAE.

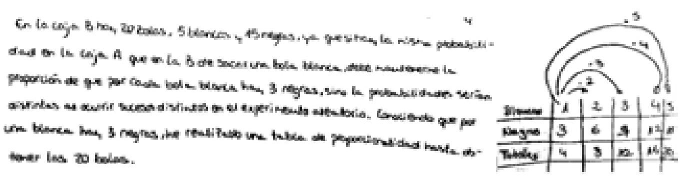

Figura 4. Solución en base a la relación de proporcionalidad dentro de las magnitudes (nivel 1 de RAE) elaborada por MF7. Justificación pertinente.

En otros casos, los MF reconocen la relación de proporcionalidad entre las magnitudes número de bolas totales (respectivamente, blancas, negras) de ambas cajas, identificando el factor 5 como constante de proporcionalidad y aplicándolo para determinar la composición de la caja B. Por ejemplo, MF5 indica "Supongamos que en la caja A hay únicamente 4 bolas. Si en la caja B hay 20, eso quiere decir que hay 5 veces más bolas que en la caja A". También se observa por medio de la equivalencia entre las razones (1:3 equivale a 5:15), como indica MF40: "Hay 20 bolas y la razón tiene que ser 1:3 por lo que habrá 5 blancas y 15 negras 1(x5): 3(x5) =5:15". En este caso, la actividad se considera también de nivel 1 (relación de equivalencia entre razones).

Finalmente, ocho MF proponen soluciones similares a la Solución 3 del análisis *a priori*, en las que se pone en juego una estrategia de valor faltante (nivel 2 de RAE) planteando una ecuación proporcional que relaciona las probabilidades de éxito de cada urna (Figura 5).

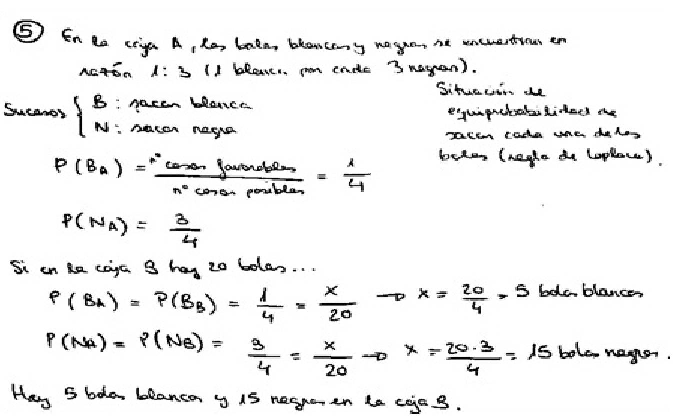

Figura 5. Solución de MF41. Nivel 2 de RAE.

Aquellos MF que elaboraron una solución correcta en este nivel de RAE, la justificaron en su mayoría de manera (parcial o totalmente) adecuada. En la solución dada por MF41 (Figura 5) se observa que identifica la posibilidad de aplicar la regla de Laplace (equiprobabilidad de sucesos elementales) y que establece la proporción dada por la igualdad de la probabilidad en ambas cajas, siendo la incógnita en esta ecuación proporcional el número de bolas blancas (si bien luego emplea el mismo símbolo literal para referirse al número de bolas negras). En todas sus propuestas, mencionan la equivalencia entre razones o que se trata de un problema de proporcionalidad. Por ejemplo, MF38 indica "Si en la caja B hay 20 bolas y es igual de probable sacar una bola blanca que en la A, esto quiere decir que son proporcionales:

Finalmente, hemos realizado un test Chi-cuadrado con el objetivo de determinar si existe una asociación significativa entre las variables nivel de RAE y pertinencia en la justificación, o si, por el contrario, estas variables son independientes entre sí. En esencia, el test Chi-cuadrado se emplea para examinar si las frecuencias observadas en la tabla de contingencia (Tabla 3) difieren de manera significativa de las frecuencias que se esperarían en ausencia de relación, lo que revelaría una independencia entre las variables estudiadas. Dado que se obtiene un estadístico Chi-cuadrado de 16,1988 y un p-valor asociado de 0,01273, es posible concluir que existe una relación significativa entre el grado de pertinencia y los niveles de RAE. Este hallazgo respalda la idea de que el grado de pertinencia puede influir en el nivel de razonamiento algebraico y viceversa.

5. Discusión

En este trabajo se han analizado las soluciones de maestros en formación a una tarea que persigue determinar la composición de una urna de tal forma que la probabilidad de éxito sea la misma que en otra donde se conoce la razón de casos favorables a casos desfavorables. El análisis nos ha permitido identificar, los tipos de estrategia empleadas (vinculadas al razonamiento proporcional) y los aspectos del razonamiento algebraico y probabilístico que implican.

Aunque la tarea es sustancialmente distinta de las propuestas en investigaciones previas para evaluar el conocimiento de estudiantes o docentes en formación, los resultados muestran como en el caso de Hernández-Solís *et al.* (2021b) con estudiantes, una buena comprensión de la idea de espacio muestral y facilidad para determinarlo en condiciones de equiprobabilidad. En general, los MF determinaron con éxito la composición de la caja B, si bien un 10% de ellos consideraron que la igualdad de la probabilidad sólo se garantiza con la igualdad en la composición y solo el 13,56% proporcionó una justificación en la que se vinculara de manera clara la probabilidad y la razón de reparto entre las cantidades de bolas blancas (casos favorables) y bolas negras (casos desfavorables) para respaldar su estrategia. La dificultad para argumentar en situaciones de probabilidad ha sido encontrada también en investigaciones previas (Ortiz y Mohamed, 2014; Vásquez y Alsina, 2017).

En nuestro análisis hemos podido observar que predominan las prácticas matemáticas de carácter aritmético y proto-algebraicas incipientes. Así, la técnica más frecuente es la de reparto aditivo con apoyo icónico o diagramático (nivel 0 de RAE). Al respecto, investigaciones previas como las de Begolli *et al.* (2021) o Bryant y Nunes (2012), muestran que tanto niños como adultos no suelen tener en cuenta las proporciones cuando se les pide que resuelvan problemas de probabilidad. No obstante, y aunque en menor medida de lo que esperábamos, también se observa el empleo de estrategias de nivel 1 de RAE, que revelan características propias del razonamiento proporcional, tales como la división por la razón o el uso como operador de la fracción de casos favorables frente a los posibles. Sorprendentemente, la resolución por medio de regla de tres es minoritaria, siendo este el procedimiento preferido en problemas de valor faltante o de repartos en el contexto aritmético de la proporcionalidad (Burgos y Godino, 2022; Burgos *et al.*, 2018).

El análisis de las soluciones (respaldado por la prueba Chi-cuadrado) muestra, como pensábamos, que a medida que se evidencia un carácter más algebraico, aumenta la pertinencia en la justificación, lo que por otro lado se relaciona con un mayor razonamiento probabilístico. En concreto el 46,67% de las de nivel 0, el 70,59% de las de nivel 1 y todas las de nivel 2, se basan en la definición de probabilidad y la idea de razón, mostrando rasgos de un adecuado razonamiento probabilístico, a saber, la comprensión del espacio muestral (es decir, la exploración de las posibilidades de los resultados de un experimento aleatorio) y la naturaleza proporcional de la determinación, cuantificación y comparación de probabilidades (Bryant y Nunes, 2012).

Con relación a la dificultad para justificar la solución, autores como Buforn *et al.* (2018) o Riley (2010) consideran que la falta de comprensión sólida del razonamiento proporcional motiva que los profesores recurran a explicaciones procedimentales en situaciones que implican la relación de proporcionalidad. Para impulsar en los futuros profesores los conocimientos conceptuales, proposicionales y argumentativos del razonamiento proporcional (Buforn *et al.*, 2018), puede ser conveniente ampliar los contextos de estudio desde el aritmético al geométrico, funcional o probabilístico. Dado que el contexto influye de manera determinante en las estrategias empleadas por los estudiantes (Supply *et al.*, 2023) y el contexto probabilístico introduce una forma de pensar diferente a otras ramas de las matemáticas (Borovnick y Kapadia, 2014), discutir sobre la validez de las estrategias en este contexto podría permitir avanzar en el desarrollo del razonamiento proporcional. Al respecto, Supply *et al.* (2023) advierten que la presencia de incertidumbre, el carácter intangible de la probabilidad (cantidad intensiva) y la similitud física entre los espacios de medida, dificultan, pero también enriquecen el razonamiento proporcional en el trabajo probabilístico.

Aunque los resultados de este trabajo están sujetos a las características específicas de la muestra (no aleatoria), nos llevan a considerar necesario reforzar la formación del profesorado para abordar idóneamente tareas de proporcionalidad en el contexto probabilístico. Específicamente sería conveniente vincular el aspecto procedimental (razón como división de dos cantidades, operador, ecuación proporcional) y los significados de la razón no directamente vinculados a procedimientos (en particular, la razón como índice comparativo), cuando se resuelven y argumentan problemas que implican razonamiento proporcional en probabilidad. Por otro lado, el profesor debe conocer diferentes formas de resolver las tareas que proponen a sus estudiantes, pero también poder identificar el tipo de representaciones utilizadas, los procesos de generalización implicados y el cálculo analítico involucrado en la actividad matemática correspondiente. El análisis del razonamiento proporcional y probabilístico mediante niveles algebraicos que hemos mostrado puede ser empleado por los maestros en formación para realizar un estudio microscópico de la actividad matemática, tanto desde el punto de vista epistémico como cognitivo que favorezca una adecuada enseñanza y aprendizaje de estos contenidos (Burgos y Godino, 2022). Esto constituye nuestra línea de investigación inmediata.

Agradecimientos

Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE, con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 y HUM-886 (Junta de Andalucía, España).

Referencias

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA) (2014). *Foundation to year 10 curriculum: Statistics and Probability* (ACMSPO24).

Batanero, C., Arteaga, P., Serrano, L., y Ruiz, B. (2014). Prospective primary school teachers' perception of randomness. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives* (pp. 345–366). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_19

Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J. M., y Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: Un estudio exploratorio. *Práxis Educativa, 10*(1), 11-34. https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.10i1.0001

Begolli, K. N., Dai, T., McGinn, K. M., y Booth, J. L. (2021). Could probability be out of proportion? Self-explanation and example-based practice help students with lower proportional reasoning skills learn probability. *Instructional Science 49*, 441–473. https://doi.org/10.1007/s11251-021-09550-9

Ben-Chaim, D., Keret, Y., y Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion: research and teaching in mathematics teachers' education (Pre- and In-Service Mathematics Teachers of Elementary and Middle School Classes)*. Sense Publisher. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-784-4

Borovnick, M., y Kapadia, R. (2014). A Historical and Philosophical Perspective on Probability. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking. Advances in Mathematics Education* (pp. 7–34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_2

Bryant, P., y Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: A literature review (full report)*. The Nuffield Foundation.

Buforn, A., Llinares, S., y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 23*, 229-251.

Burgos, M., Batanero, C., y Godino, J. D. (2022). Algebraization Levels in the Study of Probability. *Mathematics, 10*(1), 91. https://doi.org/10.3390/math10010091

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa, 44*, 1-22.

Burgos, M., y Godino J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria, *AIEM, 18*, 1-20.

Burgos, M., y Godino J. D. (2022). Assessing the epistemic analysis competence of prospective primary school teachers on proportionality tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 367-389.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI) (2015). *Common Core State Standards for Mathematics*. http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Franco, J., y Alsina, Á. (2022a). El conocimiento del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad: una revisión sistemática. *Aula Abierta, 51*(1), 7-16. https://doi.org/10.17811/rifie.51

Franco, J., y Alsina, Á. (2022b). Conocimiento especializado del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad. *Educación Matemática, 34*(3), 65-96.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22*(2), 237-284.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencia*s, *32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Burgos, M. y Gea, M. (2022). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*, 2609-2636. https://doi.org/10.1080/0020739x.2021.1896042

Gómez, E., Batanero, C., y Contreras, C. (2013). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema, 28*(48), 209-229. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021a). Comparing probabilities in urns: A study with primary school students. *Uniciencia, 35*(2), 1-19. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.9.

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021b). Construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos: un estudio exploratorio con estudiantes de Educación Primaria. *Educación Matemática*, *33*(1), 181-207. https://doi.org/10.24844/em3301.07

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. En, F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Information Age Publishing.

Langrall, C. W., y Mooney, E. S. (2005). Characteristics of elementary school students' probabilistic reasoning. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 95-119). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_5

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado,* núm. 52 de 2 de marzo de 2022, 24386-24504.

Ministry of Education Singapore (2012). *Mathematics syllabus: Primary one to six*. Singapur. Curriculum Planning and Development Division.

Ortiz, J. J., y Mohamed, N. (2014). Conocimiento de futuros profesores sobre espacio muestral. *Quadrante, 23*(2), 5-22.

Pratt, D., y Kazak, S. (2018). Research on uncertainty. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 193-227). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_6

Riley, K. J. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. En P. Brosnan, D. B. Erchick y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 6, pp. 1055-1061). The Ohio State University.

Sánchez, E., y Valdez, J. (2017). Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de bachillerato. *Avances de investigación en educación matemática*, *11*, 127-143.

Shaughnessy, J. M., y Cincetta, M. (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. En B. Philips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teching of Statisitics* [CD-ROM]. Cape Town, South Africa: International Statistical Institute.

Supply, A. S., Vanluydt, E., Van Dooren, W., y Onghena, P. (2023). Out of proportion or out of context? Comparing 8- to 9-year-olds' proportional reasoning abilities across fair-sharing, mixtures, and probability contexts. *Educ. Stud. Math, 113*, 371-388. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10212-5

Van Dooren, W. (2014). Probabilistic thinking: analyses from a psychological perspective. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 123-126). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_7

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad desde el modelo del Conocimiento Didáctico-matemático. *Educación Matemática, 29*(3), 79-108. https://doi.org/10.24844/EM2903.03