



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

MAGISTER

www.unioviedo.es/reunido



MONOGRÁFICO: MATEMÁTICA, TECNOLOGÍA Y ENTORNOS DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Un proyecto de innovación didáctica e investigación enfocado en la didáctica del álgebra superior mediada por recursos tecnológicos

Carmen Ordóñez Cañada*¹, Lourdes Ordóñez Cañada², Ángel Contreras de la Fuente², Miguel Ángel García Muñoz¹ y Juan Francisco Ruíz Ruíz¹

¹Universidad de Jaén. Facultad de Ciencias Experimentales. Departamento de Matemáticas, ²Universidad de Jaén. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Departamento de Didáctica de las Ciencias.

PALABRAS CLAVE

Análisis de manuales
Significados personales
Mathematica
Grado en Ingeniería
Informática
Recursos audiovisuales

KEYWORDS

Analysis of text books
Personal meanings
Mathematica
Degree in Computer
Engineering
Audiovisual materials

RESUMEN

La enseñanza y aprendizaje del Álgebra Superior para estudiantes del Grado en Ingeniería Informática, es frecuente que esté mediada por el uso del ordenador. Conscientes de ello, profesores de Álgebra de la Universidad de Jaén editamos un manual de prácticas para la asignatura Matemática Discreta, en el que se proporcionan programas originales (con Mathematica). Para la actualización de este manual, respecto de los contenidos, se introducirán cambios que permitan mejorar y optimicen el aprendizaje matemático, según las consideraciones didácticas extraídas de investigaciones realizadas dentro de un proyecto de tesis doctoral. Se han obtenido resultados relativos, tanto a los significados personales de los estudiantes (analizando la influencia de este software, los conflictos y fenómenos didácticos emergidos), como al significado institucional en manuales universitarios que abordan esta materia, cuando la enseñanza y aprendizaje se realiza en entornos computacionales. Por otro lado, se ha realizado una encuesta a 210 alumnos en este curso, acerca de los recursos tecnológicos que utilizan en el estudio de la asignatura y sus preferencias, que ha puesto de manifiesto la necesidad de soportes más dinámicos (páginas web o canales como YouTube) para el aprendizaje en la Universidad. Estas ideas se plasmaron en un proyecto de innovación docente de la Universidad de Jaén, para obtener medios humanos y técnicos y lograr una nueva edición del manual, utilizando recursos audiovisuales en un espacio web accesible y de gran difusión, e implementando las conclusiones logradas por la investigación en Didáctica de la Matemática.

A project of didactic innovation and research focused on the didactics of the superior algebra mediated by technological resources

ABSTRACT

Teaching and learning of Advanced Algebra for students of the Degree in Computer Engineering, is often carried out by the use of the computer. Aware of this, Algebra professors at the University of Jaén published a practice manual for the Discrete Mathematics course, in which original programs in the software Mathematica are included. For the update of this manual, with respect to the contents, changes will be

Universidad de Jaén

Autora de correspondencia: * Carmen Ordóñez Cañada. E-mail: ccanada@ujaen.es. Universidad de Jaén. Facultad de Ciencias Experimentales. Departamento de Matemáticas. Despacho B3-015. Paraje las Lagunillas s/n. 23071 – Jaén. (España). +953 212 414.

Recibido el 28/05/2018 – Aceptado el 11/09/2018

Revista de Formación del Profesorado e Investigación Educativa
Facultad de Formación del Profesorado y Educación
Universidad de Oviedo - Universidá d'Uviéu - University of Oviedo
Enero - Diciembre 2018
ISSN: 2340 - 4728

introduced to improve and optimize the mathematical learning, according to the didactic considerations taken from research carried out within a doctoral thesis project. Relative results have been obtained, both to the personal meanings of the students (analyzing the influence of this software, conflicts and didactic phenomena emerged), as well as to the institutional meaning in university manuals that approach this subject, when teaching and learning takes place in computing environments. On the other hand, results of a survey we conducted with 210 students regarding the technological resources they use and their preferences when studying, revealed the need for more dynamic support materials (websites or channels such as YouTube) to assist learning at university. These ideas were reflected in a teaching innovation project carried out by the University of Jaén, which collected human and technical resources for a new edition of the manual, using audiovisual materials on an accessible and widely disseminated web space, and implementing the conclusions reached in our research into Mathematic Education.

Introducción

Matemática Discreta es una asignatura de primer curso/primer semestre, del Grado en Ingeniería Informática en la Universidad de Jaén. Es una materia de formación básica pues en las estructuras algebraicas objeto de su estudio, se basan la arquitectura de un ordenador, los diseños de algoritmos, o materias tan cruciales como la Criptografía o Seguridad informática.

El aprendizaje del Álgebra en general, a nivel universitario, presenta bastantes dificultades según muestran distintas investigaciones en Didáctica de la Matemática (Dubinsky y Yiparaki, 2000; Harel y Sowder, 2007; Lacués, 2011; Distéfano, Pochulu y Font, 2015), fundamentalmente, por el grado de abstracción, el lenguaje matemático de alto nivel o la necesidad de desarrollar un razonamiento lógico deductivo.

La procedencia diversa del alumnado, tanto desde los ciclos formativos de grado superior como desde bachillerato, unido a la baja nota de corte actualmente en la Universidad de Jaén, caracteriza un grupo de alumnos numeroso, debido al auge de las ciencias de la computación, con un nivel muy diverso en Matemáticas, aunque, generalmente bajo. Todo ello se pone de manifiesto en la baja tasa de rendimiento de la asignatura y es significativo el elevado porcentaje de no presentados: durante el curso 2016-17, no se presentaron alrededor del 41% de los estudiantes en la convocatoria ordinaria y del 64% en la extraordinaria.

Por otro lado, la instrucción para el Grado en Ingeniería Informática está mediada, frecuentemente, por el uso del ordenador. Conscientes de la carencia de materiales para el estudio de esta materia utilizando recursos tecnológicos, profesores de Álgebra de la Universidad de Jaén editamos un manual de prácticas (García-Muñoz, Ordóñez y Ruíz, 2006) para la asignatura Matemática Discreta, en el que se proporcionan programas originales con el software Mathematica de todos los capítulos que componen el temario de la asignatura. Dicho texto contiene un CD-ROM en el que se incorporan los programas, preparados para ejecutarlos, además de distintos ejercicios resueltos y propuestos. La edición de dicho manual se realizó a través del servicio de publicaciones de la universidad y se han vendido mil ejemplares.

La necesidad de una nueva edición es clara debido a que la Informática y las características del alumnado cambian a un ritmo vertiginoso. Por un lado, los programas del libro de texto se realizaron para la versión 5.0 de Mathematica, ahora desfasada, de forma que es necesario actualizarlos e incorporar otros nuevos. Además, es necesario un soporte más dinámico (en lugar del obsoleto CD) para hacer llegar los contenidos del manual al estudiante y que permita el acceso rápido a través de móvil, tableta, etc.

Por otra parte, la enseñanza y aprendizaje de esta materia adquiere unas características especiales por la influencia del uso del ordenador y del lenguaje y procedimientos algorítmicos propios de la Informática. Diversos investigadores en Didáctica de la Ma-

temática muy relevantes como Balacheff (1994) o Artigue (2015), concluyen que el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática no está exento de conflictos.

La Didáctica de las Matemáticas es una disciplina científica que teoriza la producción y la comunicación del saber matemático, por lo que se centra en aquello de específico que tengan los fenómenos de comunicación y transformación de un saber matemático. Además de esto, la Didáctica plantea ir más allá; a través del análisis deberá permitir emitir juicios de adaptación, pertinencia o eficacia que orienten en el diseño e implementación de los procesos de instrucción con el objetivo de mejorar y optimizar el aprendizaje matemático. Como expresan Godino, Batanero y Font (2008):

El fin específico de la Didáctica de las Matemáticas, como campo de investigación, es el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de programas de mejora de dichos procesos. (...)

Para lograr este objetivo, la Didáctica de las Matemáticas debe considerar las contribuciones de diversas disciplinas como la psicología, pedagogía, filosofía, o la sociología. Además, debe tener en cuenta y basarse en un análisis de la naturaleza de los contenidos matemáticos, su desarrollo cultural y personal, particularmente en el seno de las instituciones escolares. Este análisis ontológico y epistemológico es esencial para la Didáctica de las Matemáticas ya que difícilmente podría estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos difusos o indefinidos. (pp.7-8)

La investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y en particular, del Álgebra Superior, requiere aplicar las "herramientas teóricas y metodológicas que ayuden a describir, explicar y tomar decisiones instruccionales fundamentadas" (Godino, 2017, p.1).

Así, la investigación y colaboración con el departamento de Didáctica de las Ciencias, es imprescindible a la hora de evaluar el impacto del manual en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra para estos estudiantes.

Se han realizado diversas investigaciones (Ordóñez, Ordóñez y Contreras, 2013, 2104 y 2015; Ordóñez, Ordóñez, Contreras y Ruíz, 2017) que se enmarcan en un proyecto de tesis doctoral avanzado acerca de la instrucción en el contexto de la Teoría de Números mediada por un entorno computacional, cuyo objetivo general es describir y analizar la influencia del software Mathematica en la enseñanza y aprendizaje de la asignatura de Matemática Discreta para los estudiantes del Grado de Ingeniería Informática. Se aplicarán las conclusiones extraídas en estas investigaciones para implementar procesos de instrucción encaminados a una mejora en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática Discreta.

Objetivos del proyecto

Según Plan de Innovación e Incentivación de las Buenas Prácticas Docentes en la Universidad de Jaén 2016 (PI2D-UJA 2016) “la innovación se plantea desde una filosofía de trabajo por objetivos que se traduzcan en resultados evaluables” (p.3). La evaluación de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas con objeto de implantar propuestas de innovación, no es una cuestión trivial; por el contrario, consideramos que dicha evaluación debe estar refrendada por un método científico, en nuestro caso, el que proporciona una disciplina como la Didáctica de las Matemáticas (Godino, 2017).

Todo lo expuesto motivó la solicitud de un proyecto de innovación docente en la Universidad de Jaén con objeto de obtener medios humanos y técnicos que permitan lograr una actualización dinámica del manual de Matemática Discreta, utilizando recursos audiovisuales en un espacio web accesible y de gran difusión, de forma que contribuyan a la mejora en la enseñanza y aprendizaje de esta asignatura. La aplicación de investigaciones realizadas en Didáctica de la Matemática sobre Teoría de Números mostraron, por ejemplo, dificultades de los estudiantes en el estudio de una demostración con Mathematica (Ordóñez et al., 2013), que se incluye en el manual, y pusieron de manifiesto la poca consideración de las hipótesis en este estudio (Ordóñez et al., 2014), así como distintos errores, relativos al lenguaje del programa Mathematica. Por tanto, se obtuvieron criterios para evaluar e implementar mejoras en el manual, que permitan incidir en las cuestiones conflictivas para el estudiante: añadir comenta-

rios o ejercicios significativos que clarifiquen y ayuden a superar las dificultades encontradas. Todo ello ha sido posible gracias a la colaboración entre las áreas de Didáctica de las Matemáticas y de Álgebra de la Universidad de Jaén.

El proyecto se tituló “Actualización dinámica de manuales con recursos audiovisuales según investigaciones en Didáctica de la Matemática”, fue presentado dentro del plan PI2D-UJA 2016 y aprobado en la resolución de 20 de abril de 2017 (Vicerrectorado de Enseñanzas de Grado, Postgrado y Formación Permanente) con código PID32_201617, con dos años de duración. El equipo está formado por los autores de este trabajo y ha sido muy valorada la colaboración interdepartamental por los evaluadores del proyecto.

Metodología

La velocidad de avances en las nuevas tecnologías y la aparición de nuevas versiones del programa Mathematica requieren una actualización constante del manual. Así, para alcanzar los objetivos se propone una metodología que consta de dos partes diferenciadas: la primera, corresponde a la actualización de contenidos del texto escrito aplicando las investigaciones didácticas realizadas, mientras que la segunda está encaminada a la construcción del soporte técnico, tanto de audiovisuales como de su alojamiento en internet. Se ha dividido en dos bloques: A y B. En la Figura 1, se presenta, a modo de esquema, las actuaciones que componen cada bloque. En negrita, aparecen las acciones abordadas hasta el momento.

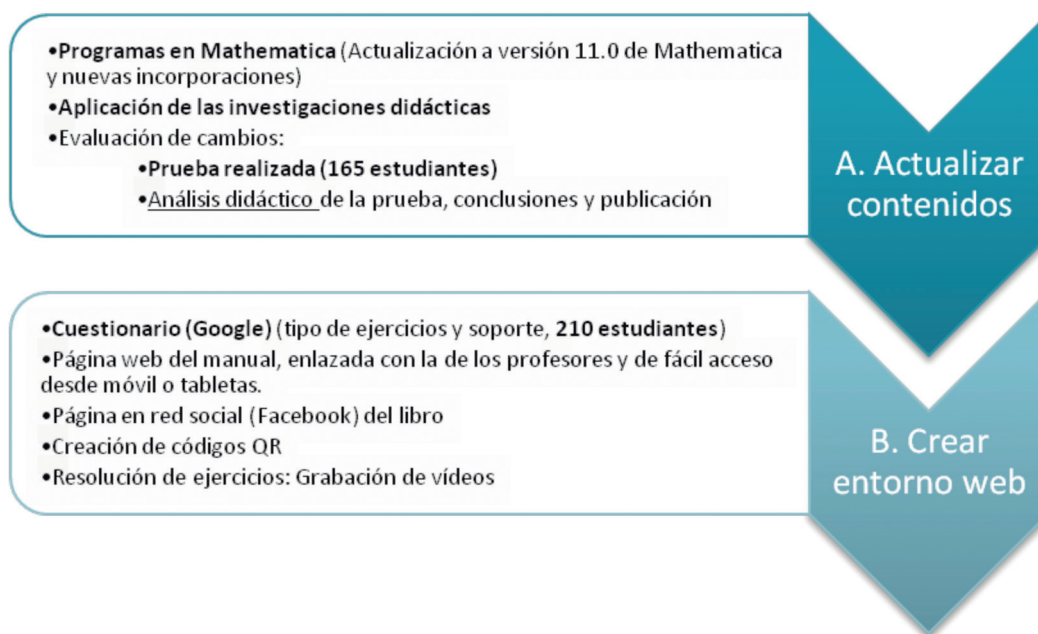


Figura 1. Metodología en el proyecto

Para la actualización de contenidos del texto escrito (bloque A de la Figura 1), en formato papel, se propuso:

A.1. Modificar el texto y los programas a versiones más actuales de Mathematica (11 o superiores, si existen en los dos años de duración del proyecto) y añadiendo otros nuevos. Esto recaerá en los profesores del área de Álgebra.

A.2. Aportar conclusiones extraídas de investigaciones en Didáctica de la Matemática que analizan y describen el impacto del uso del programa Mathematica en temática de Matemática Discreta para alumnos del Grado de Ingeniería Informática. Para ello:

A.2.1. Se propone la realización de una revisión y mejoras en el texto en la línea de las tendencias investigadas en los manuales recomendados por otras universidades. Concretamente, en

Ordóñez et al. (2015) se analiza la forma en que se abordan temas de Matemática Discreta y sus aplicaciones a la Informática, en textos recomendados para los estudios del Grado en Ingeniería Informática.

En esta línea se incluirá un mayor número de ejercicios (de exámenes de teoría y prácticas del Grado) adjuntando su resolución, en formato web, con el uso de medios audiovisuales.

A.2.2. Se proponen modificaciones que ayuden a corregir errores y conflictos descritos a través del análisis de las prácticas realizadas por los estudiantes en Ordóñez et al. (2013, 2014 y 2017) y

A.2.3. Se evaluarán los cambios antes de hacerlos definitivos, a través de un análisis de los significados personales de los alumnos, realizado mediante un cuestionario en el aula de prácticas,

que se realizó en diciembre de 2017. Se recogieron las respuestas de 165 estudiantes. El análisis didáctico de la misma está en curso, los resultados y conclusiones extraídas del mismo serán objeto de una publicación en *Didáctica de la Matemática*.

Para abordar el trabajo en el soporte técnico apropiado (bloque B en la Figura 1), se elabora un cuestionario Google que ponía de manifiesto las preferencias del alumnado, tanto respecto del entorno web como del tipo de ejercicios que les gustaría. El cuestionario fue completado en octubre de 2017 por los estudiantes matriculados en Matemática Discreta, en la hora de prácticas de la asignatura. Consta de 16 ítems: las primeras preguntas, más generales, están encaminadas a constatar las redes sociales más

utilizadas por estos estudiantes, sus preferencias respecto de páginas web, navegadores o canales audiovisuales, dispositivos móviles más utilizados (teléfonos, tabletas,...), etc. Ellas aportan información para seleccionar el soporte técnico más cercano a este tipo de estudiantes. A continuación, se exponen los resultados que corresponden a las preguntas de la 13 a la 16, pues son más significativas por estar directamente relacionadas con la nueva edición del manual.

En el ítem 13 (Figura 2), se obtuvieron 210 respuestas. Los problemas más demandados fueron los problemas de exámenes, junto a ejemplos básicos y ejercicios de destrezas y preguntas tipo.

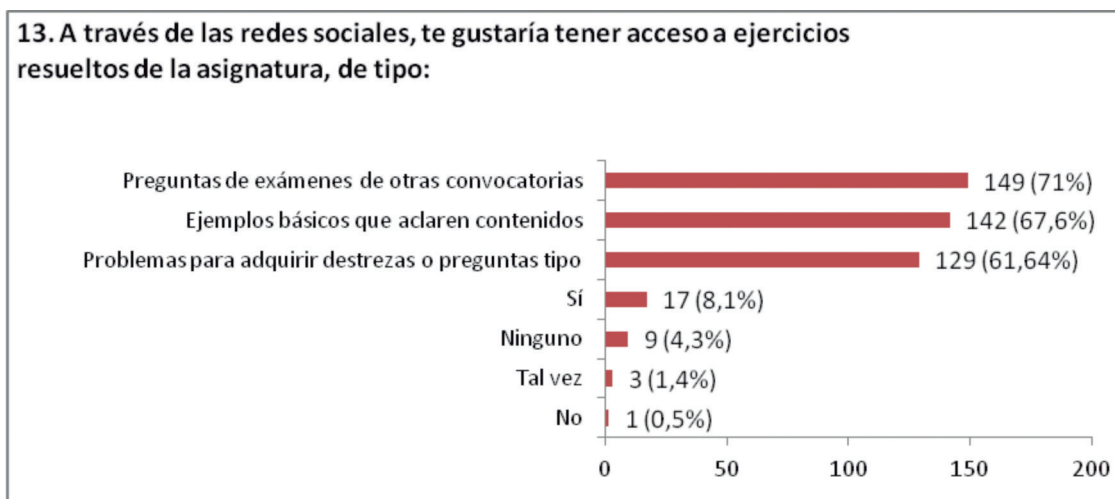


Figura 2. Ítem 13

De 189 respuestas obtenidas (algunos estudiantes no contestaron) en el ítem 14 (Figura 3), el más demandado es formato digital, un 81,5% frente al formato escrito (25%) y un 67,7% de-

manda la propuesta de recursos audiovisuales. Interpretamos que prefieren el formato pdf frente a los videos, debido a que la modalidad de examen no es la oral.

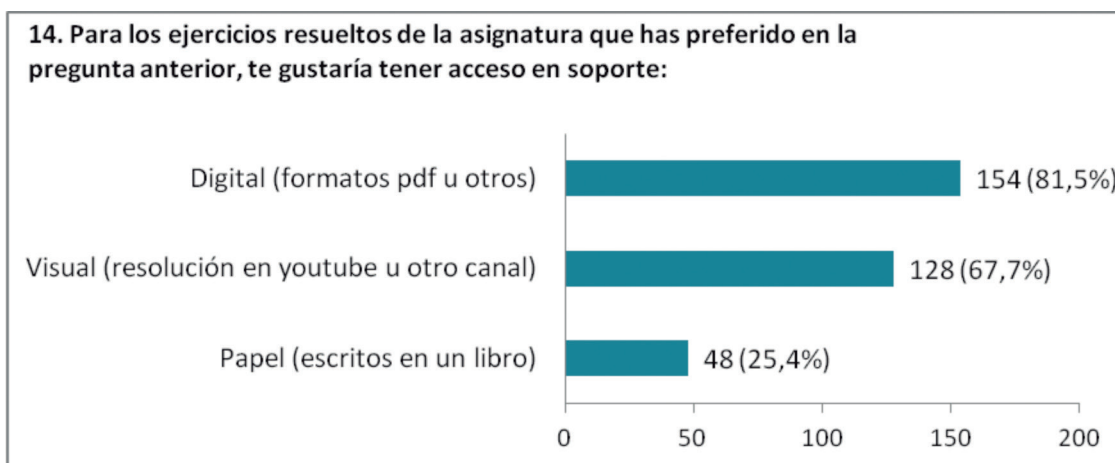


Figura 3. Ítem 14

Para el ítem 15 (Figura 4), se obtuvieron 189 respuestas, y es significativo que el 65% de estudiantes prefiere un número

pequeño de ejercicios de cada tipo, entre 2 y 4, cuestión que justificaban por la falta de tiempo.

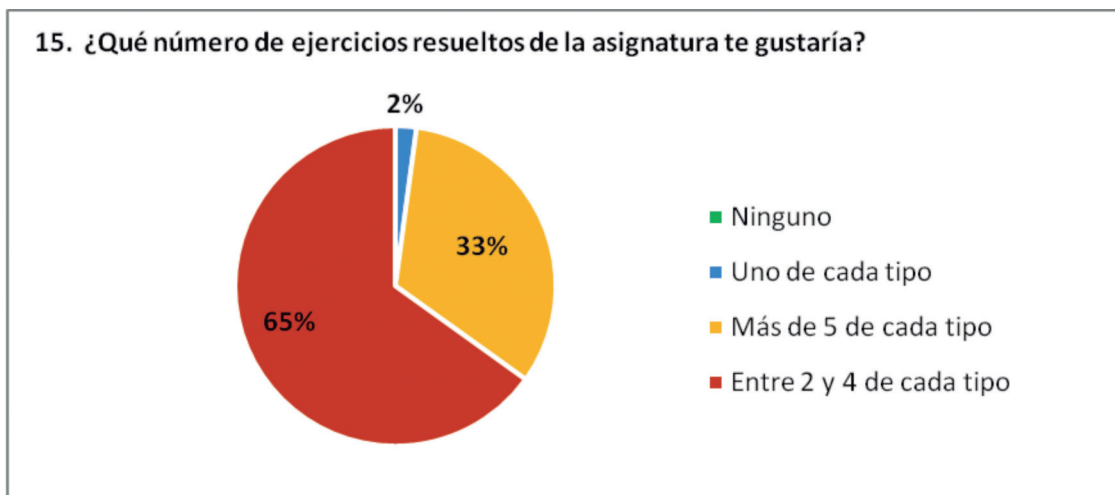


Figura 4. Ítem 15

Casi el 95% de 189 repuestas recogidas en el ítem 16 (Figura 5), prefieren la resolución en el momento o al día siguiente, como máximo.

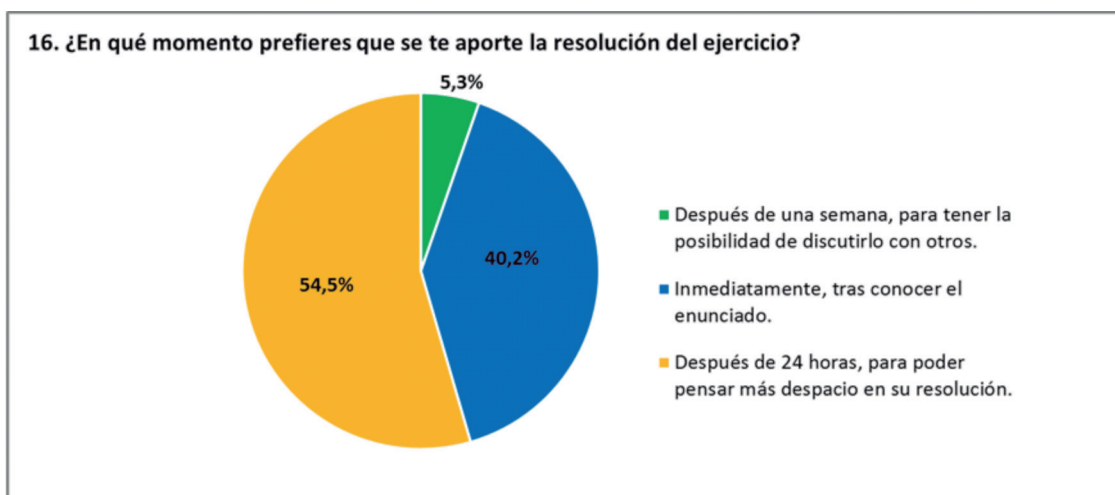


Figura 5. Ítem 16

De las consideraciones obtenidas de los estudiantes a través del cuestionario, se decide:

B. La creación de un entorno web (bloque B en la Figura 1) que consta de dos partes:

B.1. Una página web en la que alojar una guía del manual, que enlace con las páginas web de los profesores de la asignatura y facilite el seguimiento de las prácticas por parte del estudiante durante todo el cuatrimestre, a través del móvil o la tableta, y

B.2. Una página en Facebook del libro en el que se incluyan videos explicativos de la resolución de ejercicios. A los recursos audiovisuales en Facebook se accederá también a través de un código QR, que se situará en cada capítulo, y será preciso crear para su captura en el texto de exámenes de otros años del Grado en Ingeniería Informática, tanto en formato escrito (pdf u otros) como con el software Mathematica.

La construcción del soporte técnico, correrá a cargo de un becario del Grado en Ingeniería Informática (que haya solicitado las prácticas Ícaro de la UJA) y la participación de estudiantes voluntarios, en la grabación de los vídeos.

El equipo de investigadores de Didáctica de la Matemática interviene en el diseño del cuestionario Google y la aplicación de las investigaciones didácticas, así como el análisis didáctico encaminado a la evaluación de cambios en el manual. La coordina-

ción del proyecto está a cargo de la profesora del área de Álgebra y que pertenece al equipo de investigadores en Didáctica.

Marco teórico y antecedentes

Se adopta como marco teórico el enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos (Godino, 2002; Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2017), cuyas componentes y constructos se adaptan al estudio de los fenómenos y procesos que intervienen en la educación matemática sobre esta temática.

En este marco se consideran los significados de los objetos matemáticos como los sistemas de prácticas. Si las prácticas las realiza una persona, se hablará de significados personales, y si son compartidas en el seno de una institución, se trata de significados institucionales (Godino y Batanero, 1994, p.334). En las investigaciones realizadas, se han obtenido resultados relativos a los significados personales y al significado institucional en manuales, como se verá en la sección siguiente. Una forma de caracterizarlos será analizar las dificultades y errores en términos de *conflictos semióticos* que, según Godino (2002), se definen como "toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones)

en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas." (p.258). Por tanto los trabajos que se aplican presentan una investigación de caracterización de significados.

La temática de este trabajo es innovadora pues el marco de referencias es escaso en la literatura sobre el tema. Sin embargo, se pueden considerar como referencias trabajos que se encuentran relacionados con el estudio del Álgebra (a nivel universitario) o las matemáticas, mediado por un software informático.

Harel y Sowder (2007) en relación al estudio del Álgebra y la demostración se cuestionan:

(...) en vista del auge del uso de las tecnologías electrónicas en educación, especialmente sistemas informáticos del álgebra, uno debería preguntarse igualmente: ¿Podrían estas herramientas privar, o por el contrario, proporcionar, a los estudiantes la oportunidad de desarrollar habilidades de manipulación algebraica que pueden ser necesarias para el desarrollo de una noción avanzada de demostración? (p.824)

Además, en este trabajo ponen de manifiesto también dificultades de los estudiantes en relación al uso del lenguaje simbólico. Otros investigadores como Dubinsky y Yiparaki (2000), analizaron conflictos de significado de estudiantes universitarios de varios niveles. Lacués (2011) estudia estas dificultades en una experiencia de enseñanza de sistemas matemáticos de símbolos, en alumnos que ingresan en carreras de ingeniería. Distéfano, Pochulu y Font (2015) investigan acerca del uso de algunos símbolos matemáticos (entre ellos \forall o \exists) en alumnos que acceden a carreras universitarias y cursan matemáticas en su plan de estudios. También explican:

Estos símbolos no son de uso frecuente en la escuela media pero son indispensables en el desarrollo de asignaturas de Matemática impartidas a nivel universitario. (p.203).

Existen distintas investigaciones didácticas que analizan la influencia de un software informático para estudiantes universitarios: Kilicman, Hassan y Husain (2010) presentan una investigación donde utilizan Maple en el estudio de Álgebra Lineal; Maat y Zakaria (2011) investigan sobre la influencia de Maple en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias para estudiantes de ingeniería; Codes (2015) analiza el impacto de Maple en la comprensión de conceptos de series numéricas y los distintos resultados y dificultades que se han obtenido en la investigación con dicho alumnado. Obtiene que "la herramienta de cálculo simbólico se muestra como facilitadora de la construcción del conocimiento" (p. 227) pero que en ocasiones, por el uso que hacen los estudiantes, se convierte en un simple "entorno para la experimentación a ciegas".

Resultados de las investigaciones de los autores

Las investigaciones de los autores enlazadas con el proyecto se pueden dividir en: aquellas relacionadas con las dificultades de los estudiantes o relativas a los significados personales (Ordóñez et al., 2013, 2014 y 2017) y las relacionadas con el análisis de manuales, y por tanto referidas al significado institucional (Ordóñez et al., 2015).

a) En el primer trabajo (Ordóñez et al., 2013), se muestra una investigación didáctica acerca de la enseñanza y aprendizaje de una demostración que forma parte del temario de la asignatura de Matemática Discreta. En ella se analiza la influencia de un software científico, como Mathematica, en el estudio de esta demostración, utilizando el marco teórico del enfoque ontosemiótico. Se estudian las respuestas de cuestionarios sobre una muestra formada por 132 alumnos de la Universidad de Jaén; se clasifican y cuantifican los conflictos semióticos manifestados por dichos

estudiantes, lo que permite caracterizar sus significados personales y determinar fenómenos didácticos que se producen.

En concreto, del análisis cuantitativo, se observa que:

Los estudiantes no comprenden bien el esquema de demostración estudiado, porque no aplican la proposición o porque utilizan criterios erróneos, como la posición, para la elección del inverso (...). Al trabajar la demostración con recursos informáticos, han aparecido nuevos conflictos derivados de las características del programa Mathematica. (ibíd. p.8)

Entre los conflictos hallados más frecuentes, en el uso de Mathematica, destacamos los relativos a la sintaxis, la forma de realizar los cálculos a través del núcleo, etc., lo que pone de manifiesto la debilidad del programa en el lenguaje. Balacheff (1994) habla de la transposición informática:

Para designar el trabajo sobre un conocimiento que permite una representación simbólica y la implementación de esta representación mediante un dispositivo informático, ya sea para "mostrar" el conocimiento o "manipularlo". En el contexto de los entornos de aprendizaje por computadora, esta transposición adquiere una importancia particular. Significa, de hecho, una contextualización del conocimiento que puede tener un impacto significativo en los resultados de aprendizaje. (p.14)

De esta forma, se constata en esta investigación cómo la transposición informática no está exenta de dificultades, como ya se veía en Balacheff (1994) y Artigue (2015).

Se concluye que, a pesar de las dificultades que conlleva el programa Mathematica, el impacto del mismo en el aprendizaje de la demostración ha sido muy positivo pues facilita la resolución y permite al estudiante centrarse en la demostración, evitando que se disperse con tediosos cálculos numéricos. También permite visualizar las dificultades encontradas en este esquema de demostración.

Se obtuvieron pocos conflictos semióticos debido al lenguaje del entorno (Windows), lo que interpretamos que es debido a la habilidad de estos alumnos en la utilización de recursos informáticos. El hecho de que el ordenador sea el hábitat de trabajo para el estudiante del Grado en Ingeniería Informática, pues lo utiliza en el estudio de la mayoría de las asignaturas de esta carrera y posteriormente en su actividad socio-profesional, hace que este grupo sea de gran interés en el estudio de la influencia del uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por razones ecológicas.

Los resultados obtenidos en este trabajo nos llevan a incluir en la nueva edición del manual, más ejemplos y comentarios que permitan disminuir las dificultades de los estudiantes en el estudio de esta demostración. Por ejemplo, se había producido un fenómeno didáctico a la hora de calcular el inverso de un elemento en Z_n , de forma que se seleccionaba dicho inverso por la posición que ocupaba en la Identidad de Bezout (proporcionada por el programa informático). Para clarificar esta cuestión, se han incluido más ejemplos donde el inverso aparece, tanto en la primera como en la segunda posición de la Identidad de Bezout, y observaciones en el texto que incidan en que la elección del inverso es independientemente de la posición que ocupe.

b) En Ordóñez et al. (2014) se realiza una investigación didáctica para determinar el uso que hacen los estudiantes de las hipótesis del siguiente teorema cuya demostración fue objeto del estudio anterior.

Teorema

Si \bar{a} es un elemento no nulo de Z_n , entonces:
 \bar{a} admite inverso en Z_n si y sólo si $\text{mcd}\{a, n\}=1$

La hipótesis 1 (\bar{a} es un elemento no nulo) se la puede considerar como una *hipótesis invisible* pues sólo la considera el 2% de la muestra. Esto puede venir potenciado por la posición de esta hipótesis: se sitúa al inicio del enunciado y no en la parte central del teorema, donde se encuentra el bicondicional.

```
m.c.d. {25000000 , 25000000} = 25000000
m.c.m. {25000000 , 25000000} = 43
Identidad de Bézout: 25000000 = 25000000 · (0) + 25000000 · (1) .
```

Al ser distinto el m.c.d. de 1 el número correspondiente a mi DNI (25000000) no tiene inverso, también decir que en $Z_{25000000}$ el número 25000000 es igual a 0

Figura 6. Respuesta de estudiante

El alumno se ve enfrentado a un dilema ante el que debe argumentar. Un 22% abandona el ejercicio sin discernir. La autoidad del ordenador sobre sus propias consideraciones (Figura 6) es un fenómeno didáctico que también se pone de manifiesto.

Así, en la nueva edición, se incluirán aclaraciones y ejercicios que pongan de manifiesto la importancia de ambas hipótesis y, cómo el criterio del estudiante, debe interpretar e imperar sobre lo que realiza el ordenador.

c) En Ordóñez et al. (2015), se seleccionaron tres universidades españolas por ocupar los mejores puestos en el Ranking Académico (de Shanghai) de las Universidades del Mundo de Ciencias de la Computación (2014). Estas son la Universidad de Granada, la de Jaén y la Politécnica de Madrid. En segundo lugar, se buscó a través de sus páginas web las guías académicas de los grados de Ingeniería Informática, publicadas en el curso 2014-15, para localizar las asignaturas que pudieran contener los temas analizados. Se consultaron y compararon las bibliografías de cada materia y se seleccionaron siete manuales (los más recomendados o que estuvieran editados por otras universidades españolas).

Entre ellos se seleccionó el libro de texto objeto de este proyecto, por ser el único encontrado con programas para el trabajo del estudiante con ordenador. En esta investigación se realizó un análisis de textos acerca del concepto de máximo común divisor, algoritmos de cálculo y sus aplicaciones a la Informática. Se constata una evolución en el tratamiento de los temas de divisibilidad para informáticos, desde desarrollos más formales hacia otros más numéricos, que se pueden implementar utilizando lenguajes de programación.

d) Cuando la enseñanza está mediada por un entorno computacional, se observa una tendencia hacia un predominio de lo particular (Ordóñez et al., 2017), más aplicaciones a la Informática y mayor presencia del lenguaje de programación.

En esta línea se realizarán modificaciones en el texto, incorporando un mayor número de aplicaciones a la Informática y ejemplos. Así mismo, será necesario utilizar el lenguaje natural-vernáculo con objeto de explicar el lenguaje simbólico.

Conclusiones

La Didáctica de las Matemáticas, a través del análisis, ha permitido emitir juicios de adaptación, pertinencia o eficacia que orienten en el diseño e implementación de los procesos de instrucción, con el objetivo de mejorar y optimizar el aprendizaje, a través de este manual de Matemática Discreta, que utiliza recursos computacionales y está dirigido a estudiantes del Grado de Ingeniería Informática.

El análisis de la “demostración” (objeto de estudio en las investigaciones didácticas expuestas), en cuanto a la resolución de problemas prácticos, ha permitido reconstruir las prácticas correspondientes en la asignatura de Matemática Discreta.

Este grupo resulta adecuado para el estudio de la influencia del uso de las nuevas tecnologías en el aprendizaje del esquema de demostración debido a la poca frecuencia de conflictos

La hipótesis 2 ($\text{mcd}\{a, n\} = 1$) fue también poco considerada, tan sólo el 23% de la muestra. Además, cuando el ordenador realiza los cálculos:

semióticos relativos al entorno, etc., lo que se debe a que están acostumbrados al entorno computacional.

Las reflexiones teóricas en cuanto a la Didáctica de la Matemática, y en particular, del Álgebra, han puesto de manifiesto un proceso de cambio, respecto al soporte de manuales para docencia, en el Grado de Ingeniería Informática, mostrando una clara tendencia en las preferencias de estos estudiantes hacia soportes digitales y recursos audiovisuales, en lugar del formato tradicional.

De cara al futuro, se aspira seguir en la línea del análisis de manuales, caracterizando el significado institucional sobre el concepto de máximo común divisor, como ejemplo relevante en Teoría de Números en el Grado de Ingeniería Informática.

Referencias

- Artigue, M. (2015). Tecnologías de la información y de la Comunicación y Aprendizaje basado en la Investigación: ¿Qué sinergias?. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), *Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas* (pp.17-27). Academia de Artillería de Segovia.
- Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(172), 9-42.
- Codes, M. (2015). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional*. (Tesis doctoral). Universidad de Salamanca, Salamanca, España. Recuperado el 23 de febrero de 2018 de https://gredos.usal.es/jspui/bitstream/10366/76452/1/DDMCE_CodesValcarceM_ComprensionConceptosEntornoComputacional.pdf
- Distéfano, M. L., Pochulu, M. D. y Font, V. (2015). Análisis de la complejidad cognitiva en la lectura y escritura de expresiones simbólicas matemáticas. *Journal of Research in Mathematics Education*, 4(3), 202-233.
- Dubinsky, E. & Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, y J Kapput (Eds), *Research in collegiate mathematics education IV* (pp.239-286). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Font, V., Planas, N. & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(2), 89-105.
- García-Muñoz, M.A., Ordóñez, C. y Ruiz, J.F. (2006). *Métodos Computacionales en Álgebra para Informáticos. Matemática Discreta y Lógica*. Jaén: Universidad de Jaén.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.
- Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico*

- del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Recuperado el 23 de febrero de 2018 de <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino.pdf>
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325–355.
- Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10, 7-37.
- Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. En F. J. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a Project of National Council of Teachers of Mathematics*, 2, (pp.805-842). Charlotte, NC: NCTM.
- Kilicman, A., Hassan, M. A., & Husain, S. S. (2010). Teaching and learning using mathematics software “The New Challenge”. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 8, 613-619.
- Lacué, E. (2011). Enseñanza y aprendizaje de los sistemas matemáticos de símbolos. *Didac*, 55-56, 29-35.
- Maat, S. M., & Zakaria, E. (2011). Exploring Students’ Understanding of Ordinary Differential Equations Using Computer Algebraic System (CAS). *Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET*, 10(3), 123-128.
- Ordóñez, C., Ordóñez, L. y Contreras, A. (2013). Significados personales acerca de una demostración en Teoría de Números con Mathematica. *Investigación en Educación Matemática XVII*, (pp. 411-420). Bilbao: SEIEM.
- Ordóñez, C., Ordóñez, L. y Contreras, A. (2014). Las hipótesis en Álgebra, cuestiones didácticas a considerar en un entorno con Mathematica. M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). (2014). *Investigación en Educación Matemática XVIII*. (pp. 493-502). Salamanca: SEIEM.
- Ordóñez, C., Ordóñez, L. y Contreras, A. (2015). La divisibilidad en manuales para estudiantes en Ingeniería Informática. C. Fernández, M. Molina y N Planas (eds.), 2015. *Investigación en Educación Matemática XIX*. (pp. 431-440). Alicante: SEIEM
- Ordóñez, C., Ordóñez, L., Contreras, A. y Ruíz, J.F. (2017). La dualidad particular-general en el estudio de la propiedad conmutativa en ingeniería informática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.). *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico*. Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html
- PI2D-UJA 2016. *Plan de innovación e incentivo de las buenas prácticas docentes en la Universidad de Jaén 2016-2019*. Recuperado el 5 de marzo de 2018 de https://www.uja.es/gobierno/vicestudios/sites/gobierno_vicestudios/files/uploads/Presentacion%20PI2D%20PDI.pdf