

# **Psicología**

---



# REPRESENTACION Y ESTRATEGIAS COGNITIVAS EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS

JULIO ANTONIO GONZALEZ-PIENDA  
JOSE CARLOS NUÑEZ PEREZ  
ANTONIO VALLE ARIAS  
Departamento de Psicología

## RESUMEN

En el momento actual cada vez cobran más importancia las investigaciones que están ligadas de manera directa a estudiar la conducta que tiene lugar en el aula, con el objeto de encontrar planes de trabajo que faciliten la adquisición de los conocimientos impartidos en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Nuestro trabajo se centra: a) En el análisis de las investigaciones que tratan de conocer los mecanismos cognitivos implicados en el aprendizaje de las matemáticas elementales. b) Conocer el tipo de habilidades y conceptos que emplea el niño al resolver problemas. c) Investigar en el aula el proceso de desarrollo en las habilidades para resolver estos problemas. d) Analizar los resultados confrontando la línea del proceso de desarrollo de estas operaciones elementales con vistas a su aplicación en nuevos enfoques metodológicos.

*Palabras Clave:* Procesos cognitivos, Estrategias, Representación mental, Problemas.

## SUMMARY

At the present time, researches linked directly to studying behavior in the classroom are growing in importance with the purpose of binding working plans which facilitate acquisition of the knowledge taught in the teaching-learning process.

Our work is centred: a) On the analysis of researches which try to know the cognitive mechanisms within the learning of elementary mathematics. b) To know the

type of skills and concepts that the child employs when solving problems. c) To research in the classroom the development facing the type of development process of type elementary calculations with the purpose of its applications in new methodological approaches.

*Key words:* Cognitive Process, Strategies, Mental Representation, Problems.

*UNESCO:* 610201, 610204, 580106.

\*\*\*\*\*

## INTRODUCCION

---

En el momento actual cada vez cobran más importancia las investigaciones que están ligadas de manera directa a estudiar la conducta que tiene lugar en el aula con el objetivo de encontrar planes de trabajo que faciliten la posibilidad de adquirir los conocimientos impartidos en el proceso de la enseñanza escolar.

En nuestro trabajo intentamos presentar los resultados de una variedad de estudios realizados en otros países y algunos en *el nuestro* y que aportan un conjunto de conocimientos que pueden resultar válidos para nuestra realidad escolar, y centrándonos en aspectos que aún no aparecen claros y que pueden ser de interés a la hora de llevar a cabo la función docente en los primeros niveles de la enseñanza primaria. Partimos del hecho de que el desarrollo lógico del niño en los primeros años escolares presenta aún múltiples lagunas.

Concretamente, nuestro objetivo se centra en el análisis de las investigaciones sobre los mecanismos cognitivos así como las estrategias que emplea el niño en el aprendizaje de las matemáticas y en la solución de problemas en los primeros niveles de la enseñanza primaria. Se trata de conocer qué tipo de habilidades y conceptos emplea el niño al resolver los problemas, si influye o no las diferentes expresiones que tales problemas pueden presentar.

En otro trabajo (González, 1983) ya hemos puesto de manifiesto la importancia que tiene la construcción de estos esquemas y estructuras elementales para fundamentar la evolución de otros posteriores, que se desarrollan a partir de ellos.

## 1. PROBLEMAS Y FORMA DE PRESENTACION

---

Uno de los procedimientos que se emplean para conocer los mecanismos que utiliza el niño en la solución de problemas consiste en analizar el lenguaje matemático presente en la solución de problemas.

Dentro de este lenguaje matemático las denominadas "sentencias abiertas" participan del cálculo y de las estrategias de la solución de problemas al ser un tipo de planteamiento matemático intermedio entre ambos. Por una parte, suponen la realización de cálculos pero su forma de presentación lleva consigo una serie de características comunes con los "problemas verbales".

Por otra parte, las sentencias abiertas constituyen un componente importante dentro del lenguaje matemático implicando una forma de expresión y realización esencial para llegar a la comprensión de la adición y la sustracción.

Existen seis tipos de sentencias matemáticas abiertas, según la posición del dato desconocido y el tipo de operación que en ella se expresa:

$$\begin{array}{ll} a + b = ? & a - b = ? \\ a + ? = c & a - ? = c \\ ? + b = c & ? - b = c \end{array}$$

Si se combina la posición del igual en la expresión de la sentencia salen otras seis sentencias:

$$\begin{array}{ll} ? = a + b & ? = a - b \\ c = a + ? & c = a - ? \\ c = ? + b & c = ? - b \end{array}$$

Las distintas investigaciones han tratado de identificar los diferentes niveles de dificultad en la solución de las diversas sentencias. Dificultad que puede estar relacionada con:

- la operación expresada en la sentencia
- localización del signo igual (=) dentro de la sentencia, según quede ésta a la izquierda o a la derecha.
- localización del dato desconocido dentro de la sentencia.
- métodos utilizados por los sujetos en la resolución de las diferentes sentencias.

Las conclusiones a las que llegan algunas de las investigaciones (Groen y Poll, 1973; Gronws, 1974; Weaver, 1973; Lindval e Ibarra, 1980) se pueden concretar en las siguientes:

- a) Las sentencias canónicas son más sencillas que las no canónicas en su solución.
- b) Las sentencias canónicas de la sustracción son más difíciles que las de adición.
- c) Aquellas sentencias en las que está omitido el minuendo son significativamente más difíciles que las demás sentencias.
- d) No aparecen diferencias de dificultad en la resolución de las sentencias  $a + ? = c$ ;  $? + b = C$  y  $a + b = c$ .
- e) La situación de la operación en el lado derecho de la igualdad hace que la solución sea más difícil que cuando se sitúa en el lado izquierdo.

En relación al efecto de la posición del dato desconocido sobre la solución de las sentencias abiertas en el trabajo de Hiebert (1982) se muestra la importancia de este aspecto, ya que el niño hace una representación del problema para llegar a la solución

del mismo y esta representación se ve influida por la posición que tenga el dato que se desconoce. Cada tipo de sentencia llama a una estrategia de solución. Los problemas cuya sentencia es  $? + b = c$  y  $? - b = c$  no conducen a ninguna estrategia de manera consistente en sujetos jóvenes, lo que lleva a la conclusión de que, cuando se desconoce la cantidad inicial, los problemas no sólo son más difíciles de representar, sino que, a su vez y por esta dificultad de representación, resultan más difíciles de resolver.

Los estudios de De Corte y Verschafel (1981) intentan desvelar los procesos que los sujetos emplean para resolver tales sentencias desde dos enfoques distintos:

A. *Las características estructurales de los problemas:*

- naturaleza de la operación aritmética
- complejidad de la tarea
- lugar que ocupa el dato desconocido

B. *Los procesos de solución*, es decir, las fases por las que pasa o debe pasar el sujeto en la solución de las sentencias:

- *Fase de pensamiento* que recoge todas las acciones que conducen a tomar las decisiones a realizar.
- *Fase de técnica o de ejecución* en la que se realizan las operaciones.
- *Fase de comprobación* supone la verificación del resultado hallado.

Los mismos autores al analizar las conductas apropiadas e inapropiadas que emplean los niños para alcanzar la solución de las sentencias encontraron diferentes esquemas o patrones de acción.

a) Un patrón de *aproximación semántica* a la sentencia numérica en la que los números y los símbolos del problema se transforman en un esquema cognitivo semántico. La existencia de estos esquemas pone de manifiesto que un esquema semántico bien construido puede facilitar la solución de sentencias abiertas. No faltan autores que encuentran cierta relación entre estos esquemas y los planteados por Greeno (1978) para resolver los problemas palabra de causa-cambio y los de combinación.

Lindvall e Ibarra (1980) comprobaron que solo un 25% de los sujetos resolvían los problemas de tipo  $? = c$ , mientras que eran capaces de resolver un 50% de los problemas en los que interviene el mismo tipo de sentencia numérica.

b) Otro tipo de esquema señalado por De Corte y Verschafel es el llamado de *ensayo-error* por el cual el sujeto observa que el dato que falta en la sentencia  $? - b = c$  tiene que ser mayor que los datos que aparecen en el problema por lo que no puede resolverse restando los datos lo que constituye la tendencia errónea más extendida. El sujeto inicia una serie de pruebas en las que sustituye el dato desconocido por diferentes números hasta que consigue con frecuencia la expresión correcta.

Este tipo de solución lleva consigo un buen trabajo de memoria y constituye un procedimiento que generalmente no se enseña en las aulas.

En las estrategias inapropiadas se pone de manifiesto no sólo que el problema no es familiar al sujeto, sino que este lo resuelve igualando el proceso a algo ya conocido anteriormente sin tener en cuenta las características peculiares de la tarea planteada.

Este modo de proceder sería la consecuencia del tipo de enseñanza que generalmente se presenta a los individuos. Según De Corte y Verschaffel en el proceso de

enseñanza lo que se crean son estereotipos; lo que facilita que el sujeto prescindiera de la fase de *análisis de tareas*, así como de la *verificación de la solución* obtenida. Dentro de este contexto los errores se interpretan como insuficiencias en el aprendizaje y se aprenden únicamente métodos específicos y aislados de realizar las operaciones básicas, por ejemplo, la suma y la sustracción. Con ello se dificulta el empleo de tales métodos en tareas menos familiares. Así los sujetos llegan a resolver con más facilidad tareas familiares, pero no se ha dotado al sujeto de estructuras y procedimientos de pensamiento que le permitan analizar y transformar las situaciones que se plantean al resolver sentencias abiertas, en concreto, cuando estas sentencias no son idénticas a las planteadas con anterioridad. Consecuentemente, al no efectuar tal análisis los sujetos aplican patrones de respuestas que no se corresponden con el problema planteado.

Para mejorar las sentencias abiertas los autores proponen, entre otras actividades, el conocimiento conceptual del esquema parte todo, la utilización del signo igual, realización de actividades de análisis de tareas y la comprobación de resultados. De esta manera se conseguiría una mejora en la solución de sentencias abiertas por parte de los niños.

## 2. EXPRESIONES VERBALES EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS

---

Bajo la denominación de “problemas verbales” u otros como “problemas palabra” o “problemas historia” se agrupan todos aquellos problemas en los que debe trasladarse un texto a una expresión o resultado matemático más o menos complejo. Se trata de la identificación por parte del niño de un conjunto de expresiones que se refieren a cantidades y que incluyen la descripción de las relaciones existentes entre otras cantidades.

El término problema, por otra parte, hace referencia a una situación en la que el individuo ha de llevar a cabo una tarea con la que previamente no se había encontrado o para la que los conocimientos que posee no especifican completamente la forma en que ha de solucionarse (Resnick y Glaser, 1976); Lester, 1983; Nesher, 1982).

El proceso implica leer e interpretar las palabras, determinar las operaciones que son necesarias y plantear el problema de forma que pueda llegarse a la solución del mismo siguiendo una serie de procedimientos concretos. Son numerosas las experiencias que han tratado de acercarse a las realizaciones en la solución de problemas-palabra por parte de los niños. Ello pone de manifiesto los diferentes puntos de vista y las diferentes variables desde las que es posible realizar estudios sobre la solución de problemas verbales.

Esquemáticamente podemos describir:

- a) *Factores relativos al individuo*: destrezas que utiliza, variables lingüísticas como son reconocer nombres, verbos..., utilizar señales de referencia, capacidad lectora, estrategias para reconocer los datos y los procesos de solución, etc.
- b) *Factores relativos a la tarea*: longitud de la expresión del problema, complejidad gramatical de las sentencias, orden de las expresiones en

el problema, tipo de sentencia numérica que refleja el problema, complejidad de las operaciones a realizar...

c) *Factores relacionados con el proceso.*

Se trata, pues, de estudiar la naturaleza del problema, su contenido, estructuras sintácticas, expresión del problema, conocer los procesos que se siguen en la solución de los problemas, identificar los conocimientos que el sujeto necesita para llegar a una solución. En su conjunto las diferentes investigaciones suponen un intento de conseguir una representación lógica de los procesos seguidos en la realización de la tarea y qué influencia tiene la estructura de la tarea sobre la conducta del sujeto. En este contexto, el estudio de Greeno (1980) sobre los conocimientos lingüísticos necesarios para resolver problemas-palabra y la representación de la información proporcionada por el problema sobre relaciones, destaca la importancia del factor lingüístico y factual (conocimiento de los hechos que se reflejan en el problema).

Una de las conclusiones de este trabajo en relación a las expresiones en que viene planteado el problema es que algunas proposiciones son más fáciles de resolver que otras. Así los niños no encuentran mayor dificultad en resolver aquellas sentencias que reflejan directamente una *variable*, mientras que sí la tienen en resolver aquellos problemas en los que las sentencias reflejan *relaciones*. Aspecto que ya había indicado Loftus y Suppes (1972). Por ejemplo, las sentencias del tipo: Luis tiene 4 canicas no presentan dificultad para su comprensión, mientras si la presentan sentencias del tipo: Luis tiene 4 caramelos más que Juan. La investigación de Mayer (1982) distingue en los problemas tres tipos de expresiones:

- a) Expresiones o proposiciones que plantean valores numéricos: Jorge tiene 6 balones.
- b) Expresiones que plantean relación: Luis tiene 4 canicas más que Pedro.
- c) Proposiciones que preguntan en relación al valor numérico: ¿Cuántos lapiceros tiene...?

Según Mayer, el niño al resolver los problemas de acuerdo con las diversas expresiones comete distintos errores:

- 1º Errores de especificación: tienen lugar cuando el sujeto cambia algunas de las variables en las que viene expresado el problema.
- 2º Errores de omisión: se dan cuando al hacer recordar al sujeto las proposiciones del problema se omite una.
- 3º Errores de conversión: cuando lo que se cambia es el sentido de alguna proposición del problema. Es el tipo de error más frecuente.

Desde la perspectiva de las dificultades asociadas a la tarea otras investigaciones analizan las denominadas "variables estructurales" (Loftul y Suppes, 1972; Lesh y Landau, 1983) como:

- Número de operaciones necesarias para alcanzar la solución.

- Longitud de la expresión del problema, es decir, el número de palabras utilizadas en su expresión.
- Secuencialidad en la realización de diferentes problemas.

Entre las conclusiones más importantes de estos trabajos se pueden destacar las siguientes; La dificultad aumenta si los problemas son de tipo diferente a los planteados anteriormente, si la solución del problema requiere muchas operaciones y si la estructura sintáctica era compleja.

Nesher (1982), siguiendo los trabajos de Terman (1972), Jerman y Rees (1972), Lindville (1976) y Riley y Greeno (1982) analiza las *variables lógicas, sintáctica y semánticas*.

Las variables lógicas se refieren al tipo de operación y la influencia que sobre la realización del problema tiene la información superflua suministrada por el mismo problema. Este debe incluir una serie de condiciones lógicas. Por ejemplo, que exista acuerdo entre los elementos utilizados en la expresión del problema, y entre la expresión del problema y la operación a realizar. Así, cuando se utilizan diferentes argumentos para un mismo concepto o aparece un desacuerdo entre la operación manifiesta y la que se ha de realizar, aumenta la dificultad en la realización del problema.

En relación a los componentes sintácticos los aspectos que se han analizado con mayor frecuencia son: el número de sentencias numéricas, número de palabras, la situación de la pregunta, el orden de las expresiones y, si refleja o no el orden dinámico del texto.

El resultado de las investigaciones son concluyentes en el sentido de que, si *la estructura lógica está controlada, lo que más influye son las variables semánticas*. El punto de partida de estas investigaciones (Riley, Greeno y Heller, 1983; Simón, 1980; Heshner, 1982) es que la comprensión de las relaciones que existen entre las cantidades que expresan los problemas implica otros factores además de los reflejados en las expresiones matemáticas. Es decir, la solución de un problema es algo más complejo que simplemente realizar una cuenta, que es a lo que queda reducido como expresión final.

Son muchas las investigaciones (Conne, 1985; Riley, 1981; Vergnaud y Duran, 1983) en las que se trata de realizar un acercamiento a la estructura semántica utilizada en la expresión del problema y todos evidencian la influencia que la estructura semántica ejerce sobre la solución de los problemas.

Una misma expresión u operación matemática puede ser reflejo de muy diferentes tipos de estructuras semánticas que, a su vez, se solucionan con diferentes grados de dificultad. Con lo que se evidencia que en la solución de problemas no se requiere únicamente el conocimiento de la operación a aplicar, sino que existen otras destrezas que deben aplicarse y que influyen en la dificultad de la solución. Es la propia *expresión del problema* y no la expresión matemática, que puede ser la misma en diversos problemas, la que dificulta en diferente medida la solución del mismo.

Concretamente, Nesher (1982) y Teubal (1972) distinguen dos constituyentes de este componente semántico:

- 1) *El constituyente léxico*: formado por items aislados que aparecen en el texto del problema y que sirven como indicadores facilitando y dificultando la realización del mismo. Las palabras que forman el

constituyente léxico de un problema pueden ser cambiadas por otras sin que el problema sufra alteraciones.

- 2) *El constituyente contextual*: definido por la naturaleza del texto como un todo o por las dependencias semánticas planteadas por el problema, codificadas por diversos recursos lingüísticos que hacen de hilos conductores para las acciones requeridas en la solución del problema.

En relación a la influencia que ambos ejercen en la solución del problema, es mayor el peso del constituyente contextual, excepto en los problemas de comparación en los que el constituyente léxico es fundamental al ser parte integrante de su estructura lógica.

Según Riley, Greeno y Heller (1983) los conceptos cuantitativos de cambio, igualación, combinación y comparación emergen en diferentes momentos del desarrollo cognitivo y se corresponden con diferentes estructuras semánticas.

Siguiendo el mismo tipo de categorías que ya habían empleado otros autores como Greeno (1978) y Moser (1982) Neshor reduce a tres categorías los problemas en los que influye el componente contextual:

- A. *Textos dinámicos*: son aquellos en los que la operación viene expresada por una secuencia temporal. Lo característico de estos textos es la transformación expresada por verbos que describen la acción más que por la utilización de palabras temporales.
- B. *Textos estáticos*: son aquellos problemas en los que se utilizan distintas categorías para su expresión como son: agentes, situaciones... Así la dependencia semántica de estos textos se plantea por medio de adjetivos; por ejemplo, tengo 6 bolígrafos azules y 3 rojos; bien por la situación: hay 2 caballos en el prado y 4 en el corral; bien por lo agentes, como en "Juan tiene 5 monedas y Pedro tiene 2".
- C. *Textos comparativos*: en ellos aparecen términos comparativos o relacionales. Suponen forzosamente la utilización de un término comparativo como "mayor que", "menos que", "tanto... como"; "cuanto más..." etc. como parte esencial de la expresión del problema. Por ejemplo, Juan tiene 15 pesetas más que Pedro; Ana tiene tantos balones como Sara.

### **3. ESTRUCTURA SEMANTICA DEL PROBLEMA, ESTRATEGIAS Y PROCESOS DE SOLUCION**

---

Una de las conclusiones a las que llegan Carpenter y Moser (1983, 1984), en los trabajos para conocer las estructuras semánticas en las que están expresadas los problemas, es que los procesos utilizados por los niños tienen relación con los esquemas subyacentes a los problemas. Así los primeros procesos de solución reflejan directamente las acciones y relaciones planteadas en el problema.

Hay estrategias que reflejan mejor que otras las acciones tal como están descritas en los problemas. Se distinguen tres niveles en relación al material utilizado según los

sujetos resuelvan los problemas empleando material concreto o dedos, o que lo resuelvan mediante la secuencia numérica y, por último, los que lo hacen recuperando hechos numéricos de la memoria.

Entre las estrategias más utilizadas por los niños está la de *contar todo*, cuando utilizan material; estrategia que evoluciona a *contar sobre el mayor* cuando lo hacen sobre la secuencia numérica y, posteriormente, pasan a resolver los problemas por medio de los hechos numéricos aprendidos de memoria.

En los problemas de causa/cambio en los que se solicita hallar el valor de un dato, también denominados problemas de estado-transformación-estado y en los que la transformación (cambio) puede ser positiva o negativa (añadir o quitar) se utilizan varias estrategias. La diferenciación entre los diversos problemas de este grupo viene planteada tanto por el sentido de la transformación o cambio, que puede ser positiva o negativa, como por la localización de dato desconocido dentro de la expresión del problema, sea este dato desconocido el que se refiere al conjunto de partida o dato inicial, el cambio o el conjunto resultante. Así se originan las seis variaciones de problemas indicadas anteriormente y que pueden presentarse bajo el título de problemas de causa/cambio o de cambio unión/separación.

En los problemas de cambio/unión con cambio desconocido la estrategia que se utiliza es la de *añadir sobre* cuando se emplea material concreto y por la de *contar-arriba* cuando se hace por medio de estrategias de contar.

En los problemas de cambio/separar se utiliza la estrategia de *separar de*, no siendo reemplazada esta estrategia por su equivalente que sería la de *contar atrás* cuando se emplea la secuencia de contar, sino que en su lugar aparece la estrategia de contar-arriba.

Los problemas de comparación con diferencia desconocida se resuelven por la estrategia de *emparejamiento*. Son problemas en los que una relación estática une dos medidas. Son por tanto problemas en los que no se implica la acción en la transformación que ocurre. Lo que se realiza es una comparación entre dos grupos disjuntos sirviendo uno de los grupos de referente mientras que el otro es el comparado. El tercer componente de los problemas es la diferencia existente entre ambos referente y comparado. La cantidad en que uno de los grupos excede al otro. Puede desconocerse cualquiera de las tres cantidades. En los problemas de combinar con parte desconocida se emplea la estrategia de *separar*.

Estas son, entre otras, las diferentes estrategias encontradas en relación a las distintas estructuras de los problemas. Estas diferentes estrategias en la resolución de problemas aparecen en los primeros grados, pero estas diferencias desaparecen en el momento en el que los sujetos resuelven los problemas por medio de la recuperación de la memoria de actos numéricos aprendidos.

Así en la muestra que hemos utilizado mientras los niños de 1<sup>º</sup> grado mostraban una clara influencia de las estructuras del problema en la utilización de las diferentes estrategias de solución, en los de 2<sup>º</sup> grado la estructura del problema no influye de manera tan clara aunque sigue actuando. En cambio, en el 3<sup>º</sup> grado los sujetos responden mayoritariamente de los actos aprendidos de memoria y, al mismo tiempo, presentan una mayor flexibilidad en cuanto a la elección de estrategia para alcanzar la solución de los problemas.

Se llega, pues, a la conclusión de que la estructura del problema tiene una mayor influencia cuanto menor es el niño que lo resuelve, y, por otra parte, que la estructura del problema se ve reflejada de manera directa en los procesos de solución de los problemas que siguen estos sujetos.

## 4. PROCESOS COGNITIVOS Y SOLUCION DE PROBLEMAS

Se han propuesto numerosos modelos que tratan de describir y plantear hipótesis sobre las estructuras del conocimiento necesarias para resolver los problemas verbales en los niños. En tales modelos se caracteriza de forma diferente el conocimiento, utilizando diversa nomenclatura a la hora de referirse a los diversos procesos cognitivos que utilizan los sujetos en la realización de las tareas y en los cambios que se producen en esta realización. Nosotros nos vamos a centrar en aquellas teorías sobre los conocimientos requeridos para la solución de problemas que tiene su punto de partida en los planteamientos del procesamiento de la información (Simón, 1976).

En las teorías del procesamiento de la información, la conducta que tiene lugar cuando se resuelve un problema viene definida por tres componentes que son:

- 1º *El sistema de procesamiento de la información* que en este caso es el niño.
- 2º *El entorno de la tarea*, es decir, la tarea tal como viene descrita. En ella viene delimitada la conducta a seguir al definir los movimientos posibles. Al mismo tiempo interactúa con las posibilidades que capacidad de memoria, facilitando la utilización de unos procesos de solución frente a otros.
- 3º *El espacio del problema*; es la forma en que el sujeto se representa el entorno de la tarea. Surge de la manera en que el sujeto enfoca la tarea, en el que se realiza la solución del problema y cuyas características vienen determinadas por el entorno de la tarea.

En todo este proceso la solución de problemas juega un papel fundamental la *comprensión*. Entendiendo ésta como la construcción de un espacio del problema por parte del sujeto para llegar a la solución del mismo. No se puede llegar a la solución de un problema si no se comprende. Pero ¿cómo tiene lugar esta comprensión o representación? Generalmente se suelen distinguir varios procesos y subprocesos.

Simón (1976) diferencia un *proceso de comprensión* y un *proceso de solución*. A su vez el proceso de comprensión está dividido en dos subprocesos que llevan al sujeto a interpretar las expresiones en que está descrito el problema, extrayendo la información de las frases y la manera en que está expresado y a efectuar la construcción del espacio del problema. En este espacio del problema deben representarse tanto las relaciones planteadas por el problema como los elementos y los operadores que se deben aplicar para alcanzar la solución. Al hablar de la representación hay que distinguir dos aspectos:

- La representación que del problema se hace el sujeto.
- La representación que del problema se ofrece al sujeto, es decir, la utilización que se hace de diferentes formas de representación al presentar la tarea.

La segunda influye en la primera ya que hace variar la representación que del problema se hace el sujeto. Al mismo tiempo, la representación que de un problema se

haga el sujeto afectará a los procesos de solución que aplique para la resolución. Simón llega a la conclusión de que los sujetos no buscan la forma de representación más idónea para resolver los problemas, sino que la representación refleja de manera directa la forma en que está descrito el problema.

Por su parte, Mayer (1986) distingue dos aspectos en la solución de los problemas: *la comprensión de la tarea y el proceso de realización*, planteándose también subprocesos en la representación interna de la tarea, como el conocimiento lingüístico, el conocimiento semántico y el esquemático. El proceso de realización, que implica la aplicación de reglas aritméticas a la representación interna, incluye a su vez el conocimiento estratégico y operativo. Dada la importancia del proceso de representación pasamos a analizar los diversos enfoques planteados sobre la misma.

El primer dato a tener en cuenta es que la representación del problema lleva consigo la observación de las características presentes en aquel y su codificación; de forma que pueden ser utilizadas en un sistema de procesamiento de la información. Así las codificaciones que el sujeto debe realizar le permiten la aplicación de los conocimientos que posee a la tarea que trata de solucionar. En esta representación influyen a su vez las características del entorno en el que se presentan las tareas, según como vengán expresadas combinando dibujos, expresiones, símbolos, etc. Por ello la simple traslación de las expresiones verbales no es suficiente para llegar a resolver los problemas. Los diversos estudios sobre la representación se han realizado fundamentalmente desde aspectos del lenguaje por cuanto supone la unión de la forma de expresión de los problemas con las redes semánticas que posee el sujeto. Y su importancia en el campo de las matemáticas se pone de manifiesto por tener en este campo la característica de utilizar en su expresión símbolos y lenguajes específicos.

Desde el planteamiento de la teoría del procesamiento de la información se interpreta la representación como el proceso de establecer uniones entre la expresión del problema y las reglas semánticas de la persona, entre los conocimientos y los procedimientos. Supone que el sujeto se encuentra en posesión de una variedad de destrezas que permitan la reformulación del problema en el lenguaje propio del individuo, permitiendo distinguir entre lo que se conoce, porque viene planteado en el problema, y lo que se trata de encontrar.

Así, el sujeto que se enfrenta a una tarea se encuentra inicialmente con un mensaje que le llega a través de la lectura o audición, acompañado en algunos casos de esquemas, dibujos, material concreto, que tiene que transformar en un modelo manipulativo o en una serie de signos escritos. Posteriormente debe actuar sobre tales símbolos, contando o solucionando la expresión aritmética escrita. En la realización de este proceso, se pone de manifiesto la importancia que sobre el conjunto de acciones tiene la representación inicial que el sujeto sea capaz de realizar. Concretamente, Resnick y Ford (1976, 1982) describen la representación como un factor esencial en el proceso de solución de los problemas, ya que facilita la unión entre los principios matemáticos subyacentes al problema y la realización del sujeto. Distinguen tres formas de representación en la solución de problemas:

- Lingüística informal.
- Físico visual.
- Algebraica.

Cada una de estas tres formas de representación lleva a diferentes estrategias de solución que no son excluyentes entre sí, sino que los sujetos pueden mostrar más de una forma de representación en su actuación.

Desde el mismo enfoque del procesamiento de la información utilizando otra terminología Riley, Greeno y Heller (1983) plantean tres tipos de conocimiento para la solución de problemas según sus diferentes estructuras semánticas. Para estos autores el sistema para llegar a representarse la información que recibe el sujeto debe construir una red semántica y desde ella seleccionar las operaciones aritméticas que precisan las soluciones de los problemas.

Estos conocimientos son:

- a) *Esquema del problema* que permite la comprensión de las diferentes relaciones semánticas y representar la situación del problema. Existen esquemas concretos con lo que pueden representarse tipos de problemas específicos como son los de causa/cambio, comparación y combinación.
- b) *Esquema de acción* para representar el conocimiento de las acciones implicadas en la solución de problemas. Es decir, sería el encargado de relacionar el esquema del problema con los procedimientos que conducirían a la solución del mismo.
- c) *Conocimiento estratégico*: supone la producción de reglas organizadas que conducen a la solución del problema e implican el esquema de acción y las asociaciones efectuadas entre los objetivos planteados y los procedimientos para alcanzar tales objetivos. Ello lleva consigo la elección de un plan y las acciones implicadas en el mismo.

Pero no son estos los únicos modelos que se ofrecen en la solución de problemas. Otros autores como Mayer, Larkin y Kadame (1983) distinguen cuatro fases en el proceso:

- 1ª *Traslación implica* el paso de los hechos descritos en el problema a las representaciones internas. Ello lleva consigo conocimientos lingüísticos y factuales. Esta representación puede fallar si el sujeto no posee estos conocimientos.

Se pueden distinguir tres tipos de proposiciones que actúan de diferente modo en los problemas y en su representación:

- a) *Proposiciones de asignación*: en ellas se asignan valores a variables.
- b) *Proposiciones de relación*: son las que establecen relaciones numéricas entre dos variables.
- c) *Proposiciones con interrogantes* que implican preguntas.

La mayor dificultad para efectuar la translación se presenta en las proposiciones de relación.

- 2ª *Comprensión*: lleva consigo la integración en una representación interna del problema como un todo coherente, relacionando unas variables con otras. Se requiere un conocimiento esquemático que implique dominar problemas tipo, categorías de problemas a los que asimilar el problema planteado.

3ª *Planificación*: implica la representación integrada de un plan de ejecución. Necesita el conocimiento estratégico. La explicación de los fallos de los sujetos en la resolución de problemas puede encontrarse en el desconocimiento de estas estrategias necesarias para llegar a resolver un problema.

Los sujetos pueden no saber plantear objetivos. Por ejemplo, los sujetos que poseen la estrategia de emparejamiento no son capaces de resolver los problemas de comparación cuando lo hacen con material concreto.

4ª *Ejecución*: lleva consigo la realización del plan y necesita del conocimiento algorítmico. Se entiende por algoritmo un conocimiento que lleva a cabo una tarea. Se trata, pues, de los procesos que se utilizan para alcanzar la solución, es decir, conocer cómo hacer algo, realizar los cálculos y, para ello, conocer los algoritmos correspondientes a esos cálculos.

Así pues, existe la posibilidad de diferentes representaciones para cada problema y a su vez, cada forma de representación trae consigo la posibilidad de llamar a diferentes conocimientos y por ello, a diferentes estrategias a utilizar en la solución de cada problema. Mientras que inicialmente los niños pequeños están limitados por la necesidad de realizar una representación con material concreto y realizar las acciones descritas en el problema sobre el material, más adelante, el sujeto puede utilizar simultáneamente diferentes formas de representación. Esto supone la posibilidad de elección entre diferentes formas y utilizar el método más idóneo. El sujeto, según va avanzando en sus posibilidades de representación, va ampliando a la vez las posibilidades de resolver los problemas verbales de manera más acorde a los planteamientos del problema. Las diferentes formas de representación son importantes en cuanto a la posibilidad que presentan de generar nuevas ideas. Las diferentes representaciones presentan diferencias en cuanto a la importancia que conceden a los diversos aspectos que deben tenerse en cuenta para la resolución de los problemas.

## CONCLUSIONES

---

La representación que el sujeto se construye depende o está determinada por la forma en que el problema está planteado. Por otra parte, la dificultad y la forma de resolución de un problema varía dependiendo de la representación utilizada en tal entorno. Los sujetos no buscan la forma más eficiente para representarse un problema, sino que adoptan aquella forma de representación que se deriva más directamente del lenguaje del problema. Existen diversos tipos de material en el que están representados conceptos matemáticos de una manera sencilla. Por ejemplo, los bloques lógicos de Dienes hacen una representación de los diferentes sistemas de base utilizados en la numeración; los bloques lógicos, las regletas o números en color de Cuisenaire tratan de servir de representación de conceptos abstractos por medio de material sencillo y manipulable.

Un problema puede tener diversas representaciones, diferentes aspectos del problema pueden utilizar diferentes formas de representación y los procesos que permiten llegar a soluciones pueden a su vez alcanzarse desde diversas formas de representación. Para Bruner (1988) algunas de las capacidades matemáticas más importantes se relacionan con procesos que implican moverse de unas formas de representación a otras.

Para una idea matemática pueden existir diversas representaciones alternativas y una variedad de modelos concretos de diverso género que se corresponde con cada una de las interpretaciones. El hecho de que un individuo comprenda una idea no quiere decir exclusivamente que asocie dicha idea a una situación concreta, sino algo más amplio. Abstractar una idea matemática de diferentes situaciones es fundamentalmente llegar a captar el isomorfismo que existe entre situaciones estructuralmente idénticas. Aparece así la idea de trasladar de una situación a otra. Se puede hablar de comprensión de un concepto cuando el sujeto puede trasladarse de una forma de representación a otra.

Se describe la comprensión como un proceso constructivo en el que un problema se entiende cuando se llega a construir una estructura coherente y completa que represente los objetos, relaciones y conceptos incluidos en el problema.

\*\*\*\*\*

## BIBLIOGRAFIA

ASHCRAFT, N.H. (1985): "Procedural knowledge versus fact retrieval in mental arithmetic: A reply to baroody". *Develomental Review*, 3, pp. 131-135.

BAROODY, A. J., GINSBURG, H. P. y WAYNAN, B. (1983): "Children's use of mathematical structure". *Journal for Research Mathematics Education*, 14 (3), pp. 156-168.

BIERWISCH, M (1986): "Lenguaje y memoria: resultados y problemas". en M. Bierwisch: *Efectos psicológicos de los componentes estructurales del lenguaje*. Paidós, Buenos Aires.

BRUNER, J. S (1988): *Realidad mental y mundos posibles*. Gedisa. Barcelona.

CARPENTER, T. P., MOSER, M. (1982): "The developmet of addition and subtrraction problem solving skills". En T. P. Carpenter, J. M. Mose, T. A. Romberg. (Eds.): *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, New Jersey, Erlbaum.

CONNE, F. (1985): "Calculs numeriques et calcule relationells dans la resolution de problemes d' arithmetique". *Recherches en didactique des mathematiques*. Vol. 5, 3, pp. 269-332.

- DE CORTE, E. and VERSCHAFFEL, L. (1981): "Children's solution processes in elementary arithmetic problems: analysis and improvement" *Journal of educational psychology*, 73 (6), pp. 765-779.
- DE CORTE, H. and VERSCHAFFEL, L. (1985): "Beginning first graders initial representation of arithmetic word problems". *Journal of Mathematical Behavior*, 4, pp. 3-21.
- van DIJK, T. A. y KINTSCH, W. (1983): *Strategies of discourse comprehension*. Academic Press, New York.
- GARCIA MADRUGA, J. A. y COORDERO, J. I. (1987): *Aprendizaje y comprensión de textos*. UNED, Madrid.
- GREENO, J. G. (1978): "A study of problem solving". En R. GLASER: *Advances in instructional psychology*. Vol. I. Hillsdale New Jersey, Erlbaum.
- GREENO, J. G. (1976): "Nature of problem solving abilities". En V. K. Estes (Ed.): *Handbook of learning and cognitive processes*. Vol. V. Hillsdale, New Jersey, Erlbaum.
- GREENO, J. G. (1980): "Some examples of cognitive task analysis with instructional implications". En R. E. Snow, Federico y V. E. Montague (Eds): *Aptitude, learning and instruction*. Vol. II Hillsdale, New Jersey, Erlbaum.
- GREENO, J. G., RILEY, M. y GELMAN, R. (1984): "Conceptual competence and children's counting". *Cognitive Psychology*, 16, pp. 94-143.
- GRORM, G. J. y POLL, M. (1973): "Subtraction and the solution of open sentences problems". *Journal of Experimental Child Psychology*, 16, pp. 292-302.
- GROUWS, D. A. (1974): "Solution methods used in solving addition and subtraction open sentences". *Arithmetic Teacher*, 31, pp.255-261.
- HIEBERT, J. (1982): "Young children's solution processes for verbal addition and subtraction problems: the effect of the position of the unknown set". *Journal for Research in Mathematics Education*, 13 (5), pp. 341-349.
- JERMAN, M y REES, R. (1971): "Predicting the relative difficulty of verbal arithmetic problems". *Educational Studies in Mathematics*, pp. 306-323.
- LESH, R. y LANDAU, M. (1983): *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Academic Press, New York.
- LESTER, J. y FRANK, K. (1983): "Trends and issues in mathematical problem solving research". En R. Lesh y M. Landau: *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Academic Press, New York.

- LINDVALL, C. M. E IBARRA, C. G. (1980): "Incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences". *Journal for Research in Mathematics Education*, 11 (1), pp. 50-62.
- LINVILLE, V. (1976): "Syntax, vocabulary and the verbal arithmetic problems". *School Science and Mathematics*, 76, pp. 152-158.
- LOFTUS, E. F. y SUPRES, P. (1985): "Structural variable that determine problem solving difficulty in computer assisted instruction". *Journal in Educational Psychology*, 63, pp. 331-542.
- MAYER, R. E. (1982): "Memory of algebra Story Problems". *Journal of Educational Psychology*, 74 (2), pp. 199-216.
- MAYER, R. E. (1986): *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Paidós, Barcelona.
- MAYER, R. E., LARKIN, J. H. y KADAME, J. (1983): "A cognitive analysis of mathematical problem solving ability". En R. Sternberg (Comp.): *Advances in the psychology of human intelligence*. Vol. II, Hillsdale, New Jersey, Erlbaum.
- MOSER, J. M. (1982): "The emergence of algorithmic problem solving behavior". *Recherches en Didactique des Mathematics*, 3 (1), pp. 135-156.
- NESHER, P. (1976): "Three determinants of difficulty in verbal arithmetic problems". *Educational Studies in Mathematics*, 7, pp. 369-388.
- NESHER, P. (1982): "Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problem". En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (eds.): *Addition and subtraction: A Cognitive perspective*. Hillsdale, New Jersey, Erlbaum.
- RESKICK, L. B. (1982): "Syntax and semantics in learning to subtract". En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.): *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, New Jersey, Erlbaum.
- RESNICK, L. B. y FORD, W. (1976): *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale, New Jersey, Erlbaum.
- RESNICK, L. B. y NECHES, R. (1984): "Factors affecting individual differences in learning ability". En R. J. Sternberg: *Advances in the psychology of human intelligence*. Vol. II. Hillsdale, New Jersey, Erlbaum.
- RILEY, M. S., GREENO, J. G. y HELLFR, J. I. (1982): "Development of children's problem-solving ability in arithmetic". En H. P. Ginsburg (Ed.): *The development of mathematical thinking*. Academic Press, New York.

RIVIERE, A. (1986): *Razonamiento y representación*. Siglo XXI, Madrid.

SANCHEZ MIGUEL, E. (1989): *Procedimientos para instruir en la comprensión de textos*. C.I.D.E., Madrid.

SIMON, H. A. (1978): "Information processing theory or human problem solving". En W. K. Estes: *Handbook of learning and cognitive processes*. I. F. A., Hillsdale, New Jersey.

SIMON, H. A. (1980): "Problem solving and education": En D. T. Tuma, F. Reif: *Problem solving and education: Issues in teaching and reswearch*. Lawrence Erlbaum Associates, New York.

VERGNAUND, G. y DURAN, C. (1983): "Estructuras aditivas y complejidad psicogenética". En C. Coll (Comp.): *Psicología Genética y aprendizajes escolares*. Siglo XXI, Madrid.

\*\*\*\*\*

