

RECONSIDERACION DE LA GEOMETRIA

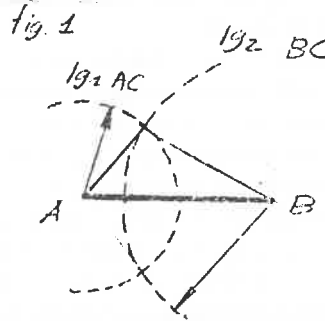
José Luis López Salas

En las recientes Jornadas para Profesores de Bachillerato, celebradas en Gijón, el tema de la Geometría fue tratado al menos por los Profesores de Dibujo y los de Matemáticas. Estos últimos, en varias de sus comunicaciones, parecen estar de acuerdo en que la desaparición de la Geometría a partir de 1.960 ha conseguido que los alumnos salgan peor preparados, menos actualizados y por supuesto con menos rigor o menos capaces para el rigor.

A pesar de que en 1.956, la UNESCO y la Oficina Internacional de Educación elevaron a los Ministerios correspondientes de los países adheridos unas recomendaciones sobre la enseñanza de las Matemáticas en que se incluían la enseñanza de la Geometría usual y representaciones geométricas y que en 1.973 la misma UNESCO, en el capítulo 3 de su publicación "Nuevas tendencias de la enseñanza de la matemática", reincide y particulariza en los objetivos y métodos de la enseñanza de la Geometría, con, eso sí, una nueva visión modernista de la misma, la verdad es que la Geometría sintética clásica, proveniente de los elementos de Euclides, con las renovaciones y aportaciones (elementos de proyectiva) de comienzos del XVIII, la Trigonometría plana y la Geometría analítica va a sufrir las consecuencias de los estudios superiores de matemáticas.

Trabajos de Bolzano (paradojas del infinito) 1883, o Du Bois Reymond (el continuo infinitario) 1873, la aparición de geometrías no euclídeas en el siglo XIX de Gauss (1815), Lobachevski (1826) y Bolyai (1832) ponen de manifiesto las deficiencias de sistema axiomático de los elementos de Euclides.

Manifestaciones de personalidades como Chebichev "la ciencia contemporánea no se interesa por esas cuestiones" rehusando leer el libro de Fedorov "Introducción al estudio de figuras", o de Kelin que rechaza el abuso de la Geometría del triángulo



en las escuelas y de la "enseñanza a la Euclides" o los gritos de Dieudonne "abajo Euclides" y "muerte al triángulo" (fig. 1) o consideraciones como la de la escuela de Bourbaki "la Geometría es una rama de la ciencia muerta por no ofrecer problemas", "la Geometría elemental es una parte del Álgebra lineal", son los pilares en los cuales se basa la reforma de los citados años 60 con la consecuencia de la práctica desaparición de la Geometría en los programas escolares de varios países.

Sin embargo desde Platón, "nadie entre aquí si no es geómetra", hasta la reforma de las llamadas Matemáticas Modernas, nadie ponía en duda la necesidad del estudio de la Geometría. Afirma Platón en la República que la enseñanza de la Geometría es conveniente a la aristocracia que gobierna el Estado. Jovellanos, en plena Ilustración, opina lo mismo respecto a la clase dirigida.

El problema está en que la Bourbaki y Dieudonne, por ejemplo, no se dedican a la enseñanza primaria ni secundaria. No obstante el mismo Dieudonne en su intervención en la mesa redonda que se celebró en Berkeley bajo el título de "la muerte de la Geometría en el nivel postsecundario" afirmó: "¿Podemos decir que la Geometría ha perdido su identidad?. Al contrario, pienso que saliendo de las estrechas fronteras tradicionales ha revelado sus ocultas potencias y su extraordinaria versatilidad y adaptabilidad y así ha llegado a ser una de las más universales y útiles herramientas en todas las partes de la Matemática. Y si alguien habla de la muerte de la Geometría simplemente testifica el hecho de que está enteramente ignorante del 90% de lo que hacen hoy los matemáticos."

La verdad es que los conocimientos geométricos son imprescindibles para entender el mundo que nos rodea, independientemente de si estos conocimientos son la abstracción del espacio o un simple modelo.

Pedagógicamente, la Geometría es conveniente para introducir y aclarar otras nociones y teorías matemáticas, incluso las ramas modernas como el Álgebra lineal y la teoría de grupos.

Respecto a los Profesores de Dibujo, se llegó a la conclusión de que éste, el Dibujo, "debe circunscribirse al ámbito de la comunicación y por tanto debe considerarse como un lenguaje, el cual es imprescindible para la formación integral del individuo, particularmente en la cultura actual".

Personalmente opino que, efectivamente, el dibujo es un lenguaje, expresión gráfica o lengua de la visión. Todo lo que vemos, miramos, observamos, percibimos y asimilamos podemos, mediante el aprendizaje de unas técnicas, expresarlo gráficamente, incluyendo los medios audiovisuales, puesto que todo cuanto se fotografía, filma o televisa, es susceptible de componer y dar color cual si de un cuadro se tratara.

Expuesto el tema de la Geometría es normal se sucite el clásico dilema de dibujo-artístico dibujo-técnico (o geométrico). Se ha llegado en esta ocasión al

acuerdo general de que dicho planteamiento no está bien enfocado, que ambos dibujos son variantes expresivas y si se polarizan las tendencias se atiende más a los contenidos que a los fines, y que todo tipo de dibujo, tanto los mencionados como el dibujo analítico, científico, etc., son lo mismo: representación de imágenes, reales, naturales, artificiales, abstractas o concretas.

No obstante en todo lenguaje existe un alfabeto o abecedario, una gramática, con todas sus partes: fonética, léxico, sintaxis y estilo.

La fonética podría consistir en la tonalidad.

El alfabeto podría estar constituido por la Geometría más elemental.

Los poliedros y demás cuerpos geométricos, podrían constituir el léxico.

El equivalente a la sintaxis sería la composición.

El estilo vendría dado por la utilización determinada de todos estos elementos.

En cuanto al arte ya sea literario o plástico es algo que aflora con la práctica, se perfecciona con la técnica pero no se puede enseñar.

Pues bien, siendo el dibujo forma y color, la primera es mera geometría o recurrimos a la simplificación geométrica para empezar a entenderla y poderla reproducir.

Para los matemáticos que estudian las Matemáticas superiores ya hemos mencionado que la Geometría carece de atractivos por no presentar problemas nuevos que es el aliciente de esta materia. Sin embargo, a nivel primario y secundario se parece estar de acuerdo en que la Geometría sigue prestándonos servicio como técnica instrumental y no solamente para las mencionadas asignaturas de Matemáticas y Dibujo, sino también para las Ciencias Naturales, Física y Filosofía.

Pero para el Dibujo es totalmente esencial. Todo el mundo artificial que nos rodea está basado en la Geometría Euclídea, regida por las coordenadas horizontal-vertical.

Es curioso observar la natural repulsión o aversión que sentimos hacia lo curvo, cilíndrico o esférico, los mareos o vértigos que sentimos al girar violentamente, al ascender o descender por una escalera de caracol, rápidamente, o lo incómodo que nos resultaría caminar por una superficie curva, ondulada o esférica, y es curioso porque tanto nuestro órgano visual, el globo ocular, como el planeta que habitamos o la bóveda celeste, son o los consideramos curvos o esféricos.

Como decíamos todo está concebido para ser horizontal o vertical, y las formas tienden a ser rectangulares, empezando por el mismo papel, en que escribimos estas líneas, libros, paredes, mobiliario etc. Así mismo cuando tratamos de reproducir el natural tendemos a "encajar" las formas en formas poligonales desde las más simples, y esto es una constante a través de la Historia.

El hombre del Paleolítico decora sus herramientas imitando los rasguños accidentales, pero lo hace ordenándolos en formas regulares simétricas, con lo que tenemos las primeras manifestaciones de la Geometría y la decoración.

El arte primitivo y el infantil oscilan entre dos temperamentos extremos, el tipo sensorial que dibuja o pinta la sensación, de expresión objetiva y el tipo intelectual de expresión más abstracta. El arte rupestre cantábrico naturalista de Altamira y el esquemático ibérico. La figuración objetiva y el abstractismo geométrico.

En las primeras civilizaciones podemos observar el tremendo auge que tomó la Geometría .

El arte egipcio geometriza los motivos naturales en la decoración de su arquitectura o realiza, en lugar de la perspectiva objetiva, la proyección abstracta de un estanque, por ejemplo en el papiro "Nahrt y su esposa Tuyu en adoración ante Osiris y Moat", Dinastía XVIII.

Pero es en las pirámides donde la Geometrización alcanza su grado máximo.

Matila G. Ghyca recopila algunas de las conclusiones a las que se ha llegado acerca de las pirámides. La de Keops, de base cuadrada, se encuentra orientada de Norte a Sur con un error de 4'35", precisión rara vez obtenida actualmente. El meridiano de la Gran Pirámide es el que atraviesa más continentes y menos mares y divide en dos partes iguales las tierras de la superficie del globo.

Si multiplicamos su altura por un millón nos encontramos con la cifra de la distancia de la Tierra al Sol, con un error de 70.000 kms. despreciable en tan enorme distancia.

La razón del lado de la base (2a) /días del año (365'242) es igual a 0'637 m., metro piramidal de Piazzzi-Smyth. Multiplicando esta longitud por un millón se obtiene la cifra 6, 374, sensiblemente igual al radio del esferoide terrestre 6, 371.

Según el mismo Piazzzi Smyth, las medidas de los elementos específicos de la Pirámide bastan para caracterizar su forma geométrica: Altura (H) 148,208; lado del cuadrado de la base (2a) 232'805 m.; semilado (a) 116,402 m., alfa (ángulo medido por el General Howard Wyse) 51° 50'.

El semilado del cuadrado (a) divide a la altura (h) dando de producto el número 1,272 que elevado al cuadrado nos da como resultado el número de oro 1,618.

El número de oro o sección áurea es una constante de la composición estética. La participación simétrica, que, a veces, es necesaria, estéticamente es nefasta. El número de particiones asimétricas es infinito, pero la sección áurea se impone por reunir el triple efecto de la equiparticipación, sucesión y proporción continua. (fig.4)

Pitágoras había observado que todo hecho geométrico se corresponde con una ley aritmética paralela y que toda armonía tiene su correspondencia con una proporción dependiente de una relación numérica.

Jay Hambidge, empezando por estudiar los vasos griegos del Museo de Boston, llega a la conclusión que todo el arte griego de la gran época (siglos VI al II antes de

J.C.) está fundamentado en los rectángulos dinámicos, en los que las diagonales nos proporcionan el crecimiento armónico de su lado mayor, específicamente el de módulo $\sqrt{5}$, que llama "The rectangle of the whirling squares" (el rectángulo de los cuadrados giratorios) y que no es otro que el módulo ϕ (número de oro). Estos dos rectángulos están emparentados entre sí $\phi = \sqrt{5 + 1/2}$. (fig.2.)

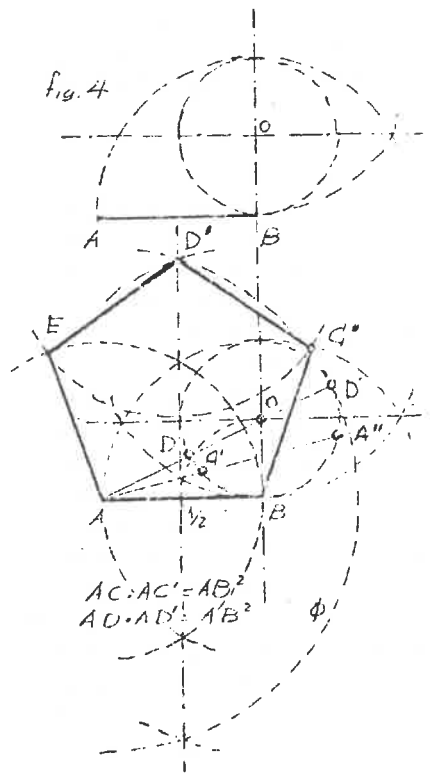
El arte romano adopta soluciones eclécticas, columnas, dintel y arquitrabe griegos, bóveda de cañón etrusca, cúpula aqueménide. Es una arquitectura ingenieril que produjo volúmenes sinceros que se corresponden con su función.

El románico introduce la modulación del espacio en elementos geométricos, cilindros, semicilindros, prismas octogonales, casquetes esféricos de pechinas triangulares.

El gótico se alarga de proporciones en un crecimiento armonioso, orgánico.

El arqueólogo Lund, en su estudio de las catedrales góticas europeas, encontró que las directrices oblicuas formaban con la horizontal $63^{\circ} 26'$ que es igual al ángulo formado por la diagonal del rectángulo $2/1$ doble cuadrado $\sqrt{5}$, y que la construcción permite obtener con un par de movimientos de compás el número de oro ϕ . En el diagrama central gótico se combinan el pentágono, el cuadrado y el triángulo equilátero. Y no solamente existe una relación lógica entre la fachada, altura total y el plano horizontal, longitud del rectángulo base, como por ejemplo en la de Colonia, sino también en las subdivisiones de las redes rectangulares que determinan los elementos estructurales del volumen y de la superficie.

Los humanistas del Renacimiento redescubren al mismo tiempo la arquitectura griega y la romana y la filosofía de la geometría de Platón.



La Geometría pasa a ser fundamento de la enseñanza, no solo de los arquitectos, también de los pintores, resultando que casi todos los grandes de esta época son también arquitectos y recíprocamente. Incluso puede decirse que todos los hombres instruidos de esta época son geómetras.

Las proporciones del cuerpo humano, en particular la sección áurea, son empleados con entero conocimiento por Miguel Angel, Vignola y Palladio en el barroco, prodigio de fantasía y virtuosismo matemático.

En el Neoclasicismo, el gusto por la antigüedad persiste, aunque se reemplaza la síntesis creadora por la reconstitución analítica y el espíritu de la geometría se rompe.

Hacia 1900, esta desconexión produce no ya decadencia sino casi la desaparición de la arquitectura como creación viva. Sin embargo, en todos los movimientos arquitectónicos posteriores, la geometría sigue presente. En el constructivismo, que tiene su eje en el "Manifiesto Realista" 1920, formulación matemática de formas dinámicas, siguiendo las reglas lógicas del espacio y tiempo; en el funcionalismo, simplicidad formal, estructuración claramente geométrica y abstracta; en el organicismo, predominio de las estructuras.

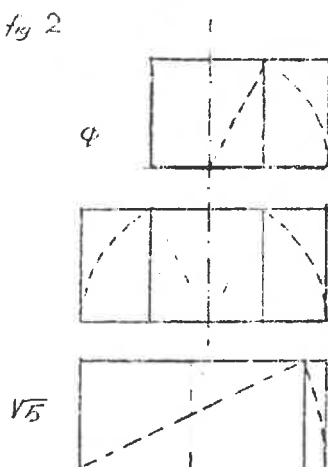
En cuanto a la pintura, cuando queremos estudiar sus elementos compositivos, empezamos por reducirla a esquemas geométricos; el sólido equilibrio de la composición en triángulo del Renacimiento; los círculos y óvalos móviles del barroco y rococó.

En el dibujo en general comenzamos por encajar las figuras que vamos a reproducir gráficamente, encerrando las formas en "cajas" poligonales sencillas, triángulos, rectángulos, cuadrados, círculos, elipses, etc.

La perspectiva cónica, que tanto contribuyó desde el Renacimiento a la representación realista, es pura geometría. Consiste en una técnica por la cual convertimos la Geometría euclídea, de formas regulares y dimensiones exactas, en las formas irregulares que nosotros normalmente percibimos, y que nuestro cerebro debe reconvertir para reconocerlas, por medio de la Geometría proyectiva, que es la que se ocupa de las formas en el espacio, de su posición.

La Geometría contribuye al reconocimiento del mundo natural y sobre todo el artificial, ya que este último recurre a las formas geométricas más claras y sencillas por su facilidad de comprensión, entendimiento y reproducción. Facilita la comu-

fig 2



nicación al ser un lenguaje simple y, no obstante, la acumulación de elementos simples, la combinación de módulos, permite la composición de estructuras más complejas, más ricas, con más funciones y más estéticas.

Si para los matemáticos la Geometría euclídea no tiene un valor creativo al no plantear ya problemas, para el artista plástico, para el diseñador, representa una fuente inagotable de creatividad por ser sus combinaciones infinitas y aprovechables para diversos tipos de representación gráfica. La forma es inseparable de la plástica y la forma es pura geometría. El arte plástico más informalista puede encerrarse o simplificarse esquemáticamente recurriendo a la Geometría.

Podemos llegar a la conclusión de que la Geometría constituye para los matemáticos una técnica instrumental de apoyatura para la comprensión de los elementos fundamentales de la matemática; y, tanto para éstos como para los físicos, filósofos, para las ciencias naturales, como para los artistas y todo el mundo en general, un medio para el reconocimiento del medio físico que nos rodea; de ahí la conveniencia de su permanencia en las programaciones de la E.G.B. y estudios posteriores; y, si bien casi todo el mundo está de acuerdo en que hasta después de los 14 años, aproximadamente, actualmente edad a la que acaban nuestros alumnos la E.G.B., un estudiante no está en condiciones de entender los razonamientos de las construcciones geométricas, no es menos cierto que los futuros maestros sí deben estar enterados de los razonamientos constructivos, para así mejor asimilarlos ellos; incluso estimo deberían y iniciar, en los últimos años de la E.G.B., a sus alumnos en dichos razonamientos, sobre todo si se tiende a una enseñanza individualizada donde se dará con frecuencia el caso del individuo más dotado que demanda explicaciones de los trazados que se le presentan; es más, concibo la Geometría como una técnica para el razonamiento del mundo físico y como un instrumento para precisamente hacer razonar al individuo, con datos tangibles no ideas abstractas, para hacerle utilizar su inteligencia acrecentándola y fortaleciéndola, mediante el ejercicio o gimnasia mental, con la ventaja de que los resultados obtenidos son comprobables por el propio ejecutante; su presentación final, cuanto mejor acabada y más estéticamente realizada, constituye una satisfacción tangible, un premio en sí misma. El campo cerebral que se ocupa de las formas, en el plano y en el espacio, y las técnicas intelectuales a utilizar, intuición, deben ser distintos de los usados en otras materias y puede constituir una riqueza indudable el desarrollo de los mismos.

Al mismo tiempo la Geometría es orden y medida. Ambas cualidades son útiles en la Sociedad industrial que nos encontramos. Desde que el hombre es consciente de sí mismo y aún antes intuitivamente, lucha contra el caos que representa la naturaleza salvaje. Toda las realizaciones humanas requieren orden y medida. La caza precisa de un conocimiento previo del animal, de sus costumbres, de un arma, una trampa, de un ordenamiento de estos conocimientos y actos que

llevan a la consecución de unos fines prácticos, la captura y aprovechamiento de la pieza. La construcción de las herramientas primeras, el fuego, la pintura, la cerámica, etc., igualmente necesitan de un orden de conocimientos y de medidas. La medida nos permite fabricar la lanza con unas dimensiones adecuadas a su función.

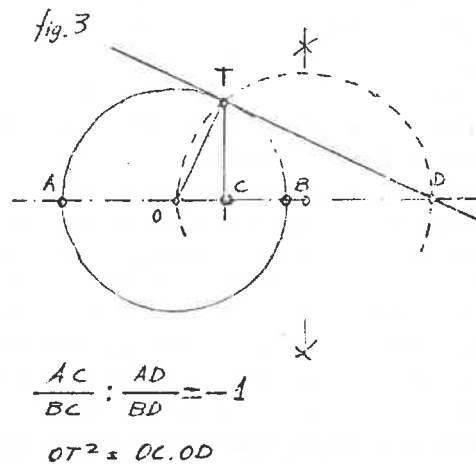
Por otra parte la ejecución de los trazados geométricos implica la práctica de una autodisciplina. El dibujo técnico, necesario para estos trazados, exige una presentación limpia, ordenada, perfecta de ejecución, sin fallos, que acostumbra al individuo a ser un perfeccionista, a hacer la obra bien hecha. Es el antídoto de la "chapuza".

Otro elemento indispensable de la Geometría es la proporción. La proporción, lo proporcionado, es una constante en el arte, en la estética y contribuye a la calidad de vida, mejorando las relaciones humanas; "tener sentido de las proporciones" nos lleva a saber "medir las distancias", a no "desmesurar las cosas y las cuestiones", "saber ocupar nuestro lugar". "Tener sentido de las proporciones" es saber componer las formas de tal manera que nos sean lo más gratas posibles.

Por último se me ocurre sería interesante hacer un somero repaso de la Geometría que se utiliza en Dibujo y algunas relaciones con otras asignaturas.

La Geometría métrica, determinación de segmentos, ángulos superficies o volúmenes y sus relaciones, tiene relaciones con las Matemáticas, Física y Dibujo. En este último caso el teorema de Thales, la sección áurea o número de oro, y los rectángulos estáticos y dinámicos tienen una importancia capital en la composición plástica, así como la cuaterna armónica, (fig.3) caso especial de la razón de cuatro puntos alineados se aplica para la resolución de tangencias, problema de Apolonio.

La resolución de problemas de tangencias es fundamental para el Diseño industrial. El triángulo egipcio 3-4-5, es una fácil aplicación del teorema de Pitágoras. Las construcciones del pentágono, por ejemplo, y del decágono, están fundamentadas en la sección áurea; ésta a su vez está relacionada con la potencia de un punto. El teorema de Thales es fundamental en las construcciones gráficas basadas en la proporcionalidad entre segmentos. Para la obtención de la media proporcional se utiliza el teorema de la cuerda y la semi-



cuerda o el de la altura y del cateto. El teorema de Thales se utiliza también para la construcción gráfica de escalas próximas a la unidad. La potencia de un punto respecto a la circunferencia, el eje radical, relacionados con los haces de circunferencias coaxiales, y en centro radical, se utiliza para la resolución de casos de tangencias.

El tema de ejes y simetrías interesa en Dibujo y Ciencias Naturales, cristalografía.

Dentro de la Geometría plana, cuando nos ocupamos de la representación de figuras del espacio representadas en el plano, el sistema de plano acotados por ejemplo, es un tema que interesa también a las Ciencias Naturales, Geología, y a la Geografía-Historia, planos, cartografía.

En la Geometría Descriptiva, sistemas de representación, la axonometría ayuda a la comprensión de la posición de un vector en el espacio. En Matemáticas se debería tratar de los vectores después de ver en Dibujo la Axonometría o viceversa.

El conocimiento de los sistemas de representación, acotado, diédrico axonométrico y cónico, son esenciales para cualquier trazado de dibujo en volumen que se quiera realizar, y una técnica imprescindible para el Profesor, de Física, Matemáticas, Ciencias naturales, Historia, sobre todo el Arte, etc.

La Geometría proyectiva, que se ocupa de las formas de los cuerpos en el espacio, es esencial para la comprensión de la deformación perspectiva que las formas ofrecen a la vista, según la posición del observador.

Dentro de la Geometría hay temas que verdaderamente son interdisciplinarios, por ejemplo las cónicas; más concretamente la parábola en Dibujo la explicaríamos como la sección de un cono; en Geometría descriptiva seccionaríamos un cono por plano paralelo a una generatriz, abatiríamos el plano, para obtener la verdadera magnitud de la curva y después procederíamos a analizar sus propiedades para a continuación realizar la construcción específica, dados dos datos de los tres necesarios, vértice, foco y directriz.

Previamente el Profesor de Historia, mejor también si lo es de Historia del Arte, nos puede hablar de cuándo se descubre el trazado de la parábola, lo que supuso su descubrimiento para el perfeccionamiento de los disparos de la incipiente artillería del Renacimiento y la utilización de la curva en el arte, la arquitectura y la ingeniería.

El Profesor de Física con un sencillo aparato que suele haber en los laboratorios, pequeña plataforma inclinada, a la manera de un reposa libros, donde se coloca un papel en blanco y encima un papel de calco sobre los que se hace rodar una pesada bola de acero lanzada desde una pletina-plataforma, nos permite ver la huella dejada en su rodada que es una semiparábola.

Sobre el experimento anterior se puede realizar la comprobación del trazado geométrico y aritmético. El Profesor de Matemáticas por último desarrollará la fórmula de su construcción matemática.

Por último para agotar el tema podría hablarnos el Profesor de Lengua de la etimología de la palabra y el de Religión de su significado religioso.

– Comunicaciones de los Profesores de Matematicas en las II JORNADAS DE PROFESORES DE BACHILLERATO.

– Matila C. Ghyka, "Estética de las Proporciones en la naturaleza y en las Artes".

– René Huyghe, "El arte y el hombre".