Psicothema
2002. Vol. 14, nº 2, pp. 382-386

ISSN 0214 - 9915 CODEN PSOTEG

Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos

Manuel Aguilar Villagrán, José I. Navarro Guzmán, José M. López Pavón y Concepción Alcalde Cuevas
Universidad de Cádiz

En el marco del estudio de los procesos de razonamiento matemático se presenta una investigación para analizar las posibles relaciones entre los logros cognitivos alcanzados durante el estadio del pensamiento formal y la resolución de problemas matemáticos. 78 alumnos/as de 4º de Secundaria fueron estudiados mediante la prueba de razonamiento lógico TOLT, y con una prueba de resolución de problemas matemáticos. El resultado en la prueba de matemáticas fue comparado en función del nivel de desarrollo formal alcanzado. Los resultados sugieren que son los alumnos con mayor nivel de pensamiento formal los que mejor resuelven los problemas matemáticos. Sin embargo, tan sólo el 36% de éstos fue capaz de resolver problemas donde los esquemas de proporcionalidad están presentes. Los resultados sugieren que alcanzar el nivel de razonamiento formal no es suficiente para saber aplicarlo en problemas matemáticos concretos, siendo necesario adquirir el conocimiento específico para llevar a cabo una correcta resolución.

Formal operational thought and mathematics problems solving. In the framework of the study of mathematics reasoning processes, a research is presented in order to analyze relationships among cognitive skills reached during the formal operational stage, and mathematics problems solving. 78 boys and girls, aged 16, were assessed with the Logical Thinking Test (TOLT), and with a Mathematics Problems Solving Test. Results in mathematics were compared in function of formal operational thought level achieved. Data suggest that students with a higher level of formal operational thought were those that better solved the mathematics problems. However, just 36% of these were able to solve problems where the proportionality squemes were required. Results suggest that reaching the level of formal reasoning is not enough to apply it in specific mathematics problems. It is also necessary to acquire specific knowledge to carry out a correct mathematics problem solving.

El estadio de las operaciones formales es considerado, dentro de la concepción piagetiana del desarrollo, como el nivel superior del razonamiento humano cualitativamente distinto de las formas de pensamiento anteriores (Andrich y Styles, 1994; Inhelder y Piaget, 1955; Kitchener y Fisher, 1990). Desde la caracterización realizada por la Escuela de Ginebra de esta etapa del desarrollo han sido muchos los trabajos que sobre el mismo se han llevado a cabo, aunque bastantes menos que los dedicados a etapas anteriores del desarrollo operatorio (Siegler, 1991).

En las revisiones realizadas sobre la adquisición del pensamiento formal por adolescentes y jóvenes se ha determinado la escasa generalidad de este tipo de pensamiento (véase Carretero, 1985; Carretero y León, 2001). El porcentaje de alumnado que muestra poseer un pensamiento claramente formal no supera el 50 por 100. López Rupérez et al. (1986), con alumnos del antiguo Bachillerato, muestra que sólo el 11% de ellos alcanza niveles adecuados de pensamiento formal; el máximo porcentaje se da en tercero (50% de los alumnos). El estudio realizado por Homs (1995), con una muestra de cerca de 3.000 participantes, verifica también que hay un escaso uso del pensamiento formal. El propio Piaget (1970, 1972) modificó sus posiciones originales, manteniendo que habría que esperar hasta los 20 años para que el pensamiento formal estuviera consolidado. Los estudios actuales permiten apoyar la idea que este tipo de pensamiento no es una adquisición fácil y homogénea como propusieron Piaget e Inhelder en sus formulaciones iniciales.

Con relación a los contenidos escolares, son numerosos los trabajos realizados sobre el aprendizaje de contenidos sociales (Pozo, Asensio y Carretero, 1986; Pozo y Carretero, 1989), científicos (Carretero, 1980; Corral y Tejero, 1986; González-Pienda et al., 1999; Pérez de Landazábal, 1993), y los niveles de desarrollo del pensamiento formal. Otros trabajos señalan la escasa relación entre el estilo cognitivo Dependencia-Independencia de Campo y niveles de pensamiento formal (Oliva, 1999; Vázquez, 1990). Estos trabajos evidencian que los alumnos no comprenden adecuadamente los contenidos básicos relacionados con las ciencias sociales y que, además, parece necesario para su comprensión no sólo disponer de habilidades de pensamiento formal, sino también de redes conceptuales o información específica sobre los contenidos de aprendizaje.

En los últimos diez años, la tendencia general de la investigación sobre pensamiento formal se ha centrado en aspectos específicos de la mente humana y no en capacidades generales. Por ejemplo, se ha estudiado en profundidad todo lo relacionado con las ideas de los alumnos sobre fenómenos científicos y los errores

Fecha recepción: 23-7-01 • Fecha aceptación: 13-11-01
Correspondencia: Manuel Aguilar Villagrán
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Cádiz
11519 Cádiz (Spain)
E-mail: manuel.aguilar@uca.es

conceptuales que cometen en su estudio, o cómo el alumnado cambia estos errores conceptuales (Pfundt y Duit, 1993; Rodríguez Moneo, 1999; Schnotz, Vosniadou y Carretero, 1999).

Son menos abundantes los trabajos que relacionan niveles de pensamiento formal y rendimiento en tareas matemáticas. Corral (1986) enseñó a alumnos entre catorce y diecisiete años a resolver tareas lógico-formales de carácter proporcional vinculadas al grupo INCR. El objetivo era comprobar si el sujeto transfiere lo aprendido a otras tareas vinculadas a la misma estructura formal y a otras distintas. Los resultados mostraron un moderado éxito en el aprendizaje de la tarea enseñada, según el tratamiento dado, y una escasa transferencia a tareas de similar estructura lógico-formal a las utilizadas en el aprendizaje. Otras investigaciones se han ajustado al estudio de esquemas operatorios formales relacionándolos con problemas que necesitan dichos esquemas para ser resueltos (Corral, 1987; Pérez Echeverría, Carretero y Pozo, 1986). En el estudio de Dixon y Moore (1996) se presentó a estudiantes de 2º, 5º, 8º y 11º grado una tarea en la que tenían que predecir cuál sería la temperatura que se alcanza al mezclar un vaso de agua en otros que están a diferentes temperaturas. Para responder es necesario utilizar estrategias matemáticas adecuadas. Encontraron que la capacidad de utilizar estas estrategias adecuadas se incrementa con la edad a lo largo de la adolescencia, pero esta condición no es suficiente para resolver la tarea. Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1997) evaluaron el razonamiento combinatorio en una muestra de 720 alumnos de 14 y 15 años, comparando aquellos que habían recibido instrucción en razonamiento combinatorio y los que no. Los resultados mostraron que ambos grupos de alumnos tuvieron gran dificultad para resolver problemas de combinatoria. Parecidas dificultades encontraron en una muestra de estudiantes del último curso de la licenciatura en Matemáticas (Roa et al., 1997). Asimismo, Saenz y León (1998) relacionan las ideas intuitivas de estudiantes de Secundaria (14-18 años) y su interacción con la comprensión de conceptos matemáticos de azar y probabilidad.

En otros trabajos hemos abordado la resolución de problemas matemáticos y sus relaciones con determinados procesos como son los estilos cognitivos reflexividad-impulsividad (Navarro, Aguilar, Alcalde y Howell, 1999), el conocimiento heurístico (Aguilar y López, 2000), el uso de analogías (Aguilar, Martínez y Aranda, 2000), o el entrenamiento instruccional (Aguilar y Navarro, 2000). Generalmente cuando se estudian las relaciones entre pensamiento formal y resolución de problemas, se suele utilizar una medida de la resolución de problemas en cuya estructura se encuentran algunos de los esquemas operatorios formales (combinatoria, proporcionalidad, etc.). Son menos los trabajos en los que se relaciona pensamiento formal y problemas matemáticos de corte más curricular. Por ello, en este trabajo nos planteamos un doble objetivo: por un lado, observar la relación existente entre los niveles de pensamiento formal y el rendimiento en resolución de problemas que contengan o no esquemas operatorios formales. Por otro, conocer si existen diferencias en los niveles de resolución de problemas matemáticos en función del nivel de pensamiento formal.

Método

Participantes

La población estudiada está constituida por 78 alumnos de 4º de Educación Secundaria Obligatoria de centros públicos de la provincia de Cádiz. Con un rango de edad entre 15 años, 7 meses a 17 años, 8 meses. Edad media de 16 años y 3 meses, 32 niños y 46 niñas. La muestra proviene de centros de Educación Secundaria con alumnado cuya extracción socio-económica es de tipo medio y medio-bajo.

Material

Para la medida del pensamiento formal se ha utilizado el Test de Pensamiento Lógico (TOLT) de Tobin y Capie (1981). Esta prueba de razonamiento formal de lápiz y papel consta de 10 ítems de opción múltiple en dos niveles, que cada alumno contesta individualmente. Evalúa los esquemas operatorios de proporcionalidad, control de variables, probabilidad, correlación y combinatoria. La puntuación obtenida oscila entre 0 y 10. Hemos usado una versión en castellano validada por Acevedo y Oliva (1995).

El rendimiento en resolución de problemas matemáticos se ha evaluado a través de una prueba de Resolución de Problemas (PRP) diseñada para este estudio (ver Tabla 1). La elaboración de esta prueba ha contado con la supervisión de profesores expertos del área de Didáctica de las Matemáticas. Consta de 9 problemas y la selección de los mismos ha tenido en cuenta las siguientes consideraciones: todos los problemas pueden ser resueltos con los contenidos matemáticos que se imparten en 4º de Educación Secundaria Obligatoria, algunos son problemas de simple aplicación de conocimientos matemáticos explícitamente enseñados (por ejemplo, resolver problemas a través de ecuaciones de primero y segundo grado) y otros son más creativos y abiertos en sus procesos de resolución (por ejemplo, el problema número 3). Uno de los problemas propuesto (el nº 9) necesita aplicar el esquema de proporcionalidad descrito por Piaget (1970) para ser resuelto correctamente. Aunque no es el objetivo de este estudio, los problemas propuestos permiten analizar los procesos heurísticos que ponen en marcha los alumnos/as de Educación Secundaria, así como el tipo de errores que cometen al resolverlos. Los problemas fueron evaluados con 1 si estaba correctamente resuelto y 0 si la solución era errónea. El rango de puntuación en esta prueba oscila entre 0 y 9 puntos.

Procedimiento

La prueba de pensamiento formal (TOLT) fue aplicada a cada participante por uno de los autores de este trabajo en su grupo clase. Fue administrada en el último trimestre del curso escolar, se aplicó siempre al iniciarse la clase de matemáticas y todos dispusieron de tiempo suficiente para su realización. La mayoría de los alumnos completó la prueba en un tiempo medio de 35 minutos.

La prueba de resolución de problemas (PRP) se aplicó en días distintos a la prueba de pensamiento formal durante la clase de matemáticas y con su profesor presente. Los participantes dispusieron del tiempo suficiente para realizarla con indicación de que no se trataba de una prueba de evaluación que tuviera reflejo en la calificación, siendo la duración media aproximada de 60 minutos. Asimismo, se les hacía hincapié en las ayudas que podían utilizar para tratar de resolver los problemas (uso de diagramas y dibujos, calculadora, pensar en un problema más fácil, ensayo y error, etc.). Tanto la prueba TOLT como la PRP fueron aplicadas en condiciones ecológicas y adecuadas al desarrollo de las clases. Las variables dependientes del estudio han sido las puntuaciones obtenidas en el TOLT y las respuestas correctas dadas en la PRP, dentro de un estudio descriptivo-correlacional con una muestra seleccionada.

Tabla 1
Prueba de resolución de problemas matemáticos (PRP)

Instrucciones: Intenta resolver estos problemas. Puedes ayudarte de calculadora, dibujos, pensar en otros problemas parecidos, etc.

1. Ana y Juan fueron de visita a una granja en la que había gallinas y conejos. Juan observó que había en total 19 cabezas, mientras que Ana dijo que en total había 60 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos había en la granja que visitaron?
2. Un instituto de 75 alumnos quiere organizar una salida al Parque Natural de Grazalema. En ese momento tienen 5.250 ptas. Además, el consejo escolar les da 200 ptas. por alumno. Para el transporte hacen falta dos autobuses y el precio del alquiler de un autobús es 9.650 ptas. La visita al Parque cuesta 100 ptas. ¿Hay bastante dinero para la salida del instituto y para entrar en el Parque?
3. ¿Puedes encontrar dos números enteros positivos a y b que al multiplicarlos dé un millón y ninguno de los dos números tenga un cero? ¿Es este par de números único o hay otros pares diferentes?
4. Un libro se abre al azar por cualquier sitio. El producto (la multiplicación) de los números de las páginas observadas es 3.192. ¿En qué número de páginas se abrió el libro?
5. Se tiene una cuerda grande que mide 240 cm. Hay que partir la cuerda en 3 trozos A, B y C. A debe ser 3 veces más largo que B. C debe ser 4 veces más largo que B. ¿Cuál es la longitud de cada uno de los trozos?
6. Este miércoles Juan y Sebastián no tienen nada que hacer. Se pasean por su barrio. Juan dice: «Me quedan 250 pesetas de mi cumpleaños. ¿Qué podría comprar?». Sebastián responde: «Yo también tengo 130 pesetas». Deciden entrar en una tienda de «Todo a 100», pero no saben qué comprar y no llegan a ver los precios de las cosas. El vendedor le dice a Sebastián: «Tú tienes 130 pesetas, tú puedes comprar una bolsita de canicas y un paquete de petardos»; a Juan: «Tú tienes 250 pesetas, te doy una bolsita de canicas y 3 paquetes de petardos». Los chicos no comprenden nada. Intentan calcular cuánto cuesta un paquete de petardos y una bolsa de canicas, y lo consiguen. Intenta calcular tú el precio de un paquete de petardos y de una bolsa de canicas.
7. Sergio y Luis pesan 75 Kg. Sergio y Pablo pesan juntos 82 Kg. Y Luis y Pablo 77 Kg. ¿Cuánto pesa cada uno?
8. Javier tiene 30 años menos que su padre y éste tiene 4 veces los años de Javier. ¿Qué edad tiene cada uno?
9. Para una fiesta, algunos alumnos de la clase deciden preparar unos crêpes. Encuentran esta receta en un libro de cocina: «Para cuatro personas, preparar una masa con: 6 huevos, 10 cucharadas de harina, 8 vasos de leche, 20 gramos de mantequilla, 16 gramos de azúcar y 6 cucharaditas de vainilla». Pero como son más, deciden aumentar las cantidades que están indicadas en la receta. Preparan una pasta con: 15 huevos, 25 cucharadas de harina, 20 vasos de leche, 50 gramos de mantequilla, 35 gramos de azúcar y 15 cucharaditas de vainilla. Los crêpes corren el riesgo de no estar muy buenos porque los alumnos han cometido un pequeño error; ellos no han respetado exactamente la receta. ¿En qué producto se han equivocado los alumnos? ¿Qué cantidad de ese producto tendrían que haber puesto los alumnos para respetar la receta del libro de cocina?

Resultados

El análisis de los resultados se ha realizado en un doble sentido. Por un lado, calculando los datos de distribución paramétrica general tanto de los resultados en el TOLT, como en la PRP. Por otro, se han llevado a cabo las comparaciones estadísticas para conocer las diferencias entre las dos medidas tomadas: el rendimiento en la prueba de problemas matemáticos y las puntuaciones TOLT dadas por los participantes, divididos éstos entre los que tienen un alto y un bajo nivel de pensamiento formal.

Los resultados descriptivos del test de razonamiento formal (TOLT) muestran una puntuación media de 4,5 (Sd= 2,7). Teniendo en cuenta que la puntuación máxima en este test es de 10 puntos, los valores se encuentran en la línea de los hallados por otros autores en contextos escolares similares (Pérez de Landazábal, 1993; Oliva, 1999; Vázquez, 1990). Sin embargo, estos valores son más altos que los encontrados en muestras de sujetos que inician los estudios de Magisterio (Raviolo et al., 2000), que muestran unas puntuaciones medias entre 2,4 y 2,6. En cuanto a las puntuaciones obtenidas en los problemas matemáticos resueltos, el valor medio alcanzado por el grupo de participantes es de 3,5 (Sd= 2,08), coincidiendo también con estudios previos de similar naturaleza (Aguilar y López, 2000; INCE, 2001). El índice de correlación entre las puntuaciones en el TOLT y la PRP es r= 0,55; p<0,.01, mientras que la aportada por Raviolo et al. (2000) entre rendimiento en el TOLT y puntuaciones obtenidas en exámenes de matemáticas fue (r= 0,38; p<0.,01). Estos autores señalan cómo todo alumno que obtiene una puntuación de 5 o mayor en el TOLT supera el 50% o más de las cuestiones planteadas en los exámenes de matemáticas.

No obstante, la comparación más interesante del estudio es la referida a cómo resuelven los problemas matemáticos los alumnos con un pensamiento formal más elaborado. En este sentido, hemos dividido a los participantes en 2 grupos. El grupo 1 está compuesto por los que obtienen una puntuación igual o superior a 6 en la prueba TOLT; a este grupo lo hemos denominado de alto nivel de pensamiento formal. El grupo 2 lo componen los que obtuvieron una puntuación en el TOLT inferior a 5 y forman el grupo de pensamiento formal bajo. Se utiliza la puntuación de 5 como medida de corte al haber dividido la muestra en dos intervalos de 0 a 4 y 6 a 10 y considerar el intervalo 0-4 como más cercano al pensamiento operatorio concreto. Estudios como los de Lawson (1976) también hacen diferenciaciones con base en estos mismos criterios cuantitativos, aunque considerando tres intervalos. Hay que tener en cuenta que el alumno que supera la puntuación de 6 ha resuelto correctamente el 60% de las tareas de razonamiento formal. Si esta puntuación la consideramos como indicativa de un desarrollo operatorio formal completo constatamos que es el 32% de los participantes los que estarían en este nivel. La tabla 2 representa los resultados obtenidos en la resolución de problemas de cada uno de los grupos, siendo la media de 4,8 (Sd= 1,82) para el grupo de alto nivel de pensamiento formal y 2,92 (Sd= 2,04) para el de bajo nivel.

Tabla 2
Resultados en la Prueba de Resolución de Problemas (PRP) en comparación con los niveles de pensamiento formal a partir del Test de Pensamiento Lógico (TOLT)

	n	Media	Sd	gl	*t*
Alto nivel de pensamiento formal (TOLT 6-10)	25	4,8	1,82		
Bajo nivel de pensamiento formal (TOLT 0-4)	38	2,92	2,04		
Comparación entre grupos				24	**3,846

** p<0,001

Mediante la *t* de Student hemos establecido la comparación estadística entre ambos grupos, encontrando diferencias significativas a favor de los que tienen un alto nivel de pensamiento formal ($t_{(24)}$= 3, 846; p<0,00l).

Un análisis más pormenorizado lo hemos realizado al comparar los resultados obtenidos por cada grupo de alumnos en cada uno de los problemas presentados. Hay que tener en cuenta que el nivel de dificultad para cada uno de los problemas es distinto y que esta variable puede ser fundamental para el análisis de la interacción entre pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. En la tabla 3 se presentan los porcentajes de participantes que han resuelto correctamente cada uno de los problemas. Asimismo se muestra para cada problema el estadístico *t* de Student y su grado de significación.

Tabla 3

Porcentaje de participantes (y *t* de Student) que han resuelto correctamente cada uno de los problemas de la Prueba de Resolución de Problemas (PRP), según el nivel alto o bajo de pensamiento formal obtenido a partir del test (TOLT)

Número del problema	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Alto nivel pensamiento formal (TOLT 6-10)	80	92	0	48	76	68	32	48	36
Bajo nivel pensamiento formal (TOLT 0-4)	45	79	0	24	29	39	26	34	8
t	*2, 009	0,811	–	2,064	**3,098	1,141	-0,7	0,253	*2,295

* p<0,01; ** p<0,001

El análisis de estas comparaciones muestra que problemas como es el nº 9, que implica la utilización del esquema de proporcionalidad, sólo es resuelto por el 36% de los alumnos con alto nivel de pensamiento formal, aunque para el grupo de bajo pensamiento formal es también uno de los problemas más difíciles de resolver. Es llamativo comprobar que todos los alumnos de alto pensamiento formal resuelven bien los dos ítems que en la prueba TOLT evalúan el esquema de proporcionalidad, pero sólo 9 alumnos (36%) resuelven bien el problema que implica la aplicación de ese esquema de proporcionalidad. Es decir, todos los alumnos de alto pensamiento formal parten del mismo nivel, pero no todos saben aplicar el esquema operatorio a una situación concreta. Asimismo, el problema nº 3, cuya resolución requiere una descomposición en factores primos, no es resuelto por ningún alumno de los dos grupos, lo que sugiere que para resolver determinados problemas matemáticos no basta con tener adquiridos los esquemas operatorios formales, siendo necesario adquirir el conocimiento específico que lleva a su resolución. En este problema, no hemos encontrado en ninguno de los alumnos de los dos grupos el uso de herramientas heurísticas que ayudaran a encontrar la solución, por ejemplo, pensar en un problema más simple. La estrategia mayoritaria en el problema 3 ha sido plantear, a través del ensayo y error, la multiplicación de dos números y, tras varios intentos, señalar que el problema no tiene solución. Esto nos apunta la importancia del estudio del proceso de resolución, más que la respuesta en sí misma.

Discusión

Los resultados encontrados en la medida del pensamiento formal a través de la prueba TOLT son coincidentes con los encontrados por Oliva (1999), pero discrepantes de otras aplicaciones en participantes universitarios más mayores (Raviolo et al., 2000). Asimismo se ha encontrado que existe relación entre la habilidad de razonamiento formal y el nivel de ejecución en problemas matemáticos. Las diferencias encontradas entre grupos de alto y bajo pensamiento formal ($t_{(24)}$= 3, 846; p<0,00l) sugieren que disponer del pensamiento formal es posible que mejore la resolución de problemas matemáticos. Un pensamiento formal alto supone mayor control sobre la planificación de tareas, de ahí que los problemas matemáticos que ponen en juego esta capacidad sean resueltos por los participantes con mejor razonamiento formal. Sin embargo, las comparaciones de los resultados obtenidos en los distintos problemas matemáticos entre participantes de alto y bajo pensamiento formal evidencian que la comprensión por el alumno de determinados contenidos específicos no estaría predeterminada por el nivel de desarrollo operatorio. Recordemos que el problema número 9, que implica el uso de la proporcionalidad, no es resuelto por todos los alumnos con alta puntuación en pensamiento formal. Como han señalado Serrano y Blanco (1988) y Corral (1986, 1987), los alumnos muestran dificultades en la aplicación del esquema de proporcionalidad. Asimismo, el problema número 3 ha sido tan difícil para los dos grupos de alumnos que ninguno lo ha resuelto. Este resultado en particular sugiere la idea, para seguir estudiando en el futuro, de la posible independencia entre conocimientos específicos y pensamiento lógico-formal, o bien que el pensamiento formal no sería, como señala Corral (1993), un conjunto de estrategias potentes para resolver problemas particulares, sino un modo distinto de enfrentarse con la realidad que le sirve para mejorar estrategias, pero que no siempre le garantizan el éxito. Igualmente, estos resultados nos sugieren la influencia de la enseñanza heurística en la resolución de problemas matemáticos (Aguilar y López, 2000; NCTM, 2000) y la importancia que en la resolución de los problemas matemáticos tienen los procesos metacognitivos y las estrategias de aprendizaje (Barberá, 1997; Lucangeli y Cornoldi, 1997), así como los enfoques constructivistas de la enseñanza de las matemáticas (Bermejo, Lago y Rodríguez, 2000). Otra sugerencia que plantean estos resultados sería comprobar si un programa de entrenamiento estándar en resolución de problemas matemáticos como el basado en Whimbey y Lochhead (1993) conlleva una mejora en los niveles de razonamiento formal.

Nota

Este trabajo fue en parte financiado por el Plan Andaluz de Investigación mediante la ayuda concedida al grupo de investigación CTS-361 del que los autores forman parte.

Referencias

Acevedo, J.A. y Oliva. J.M. (1995). Validación y aplicación de un test de razonamiento lógico. *Revista de Psicología General y Aplicada*, *48*, 339-351.

Aguilar, M. y López. J.M. (2000). Dificultades del uso del heurístico de analogía en la resolución de problemas matemáticos. En E. Marchena y C. Alcalde (Coords.), *La perspectiva de la educación en el siglo que empieza. Actas del IX Congreso INFAD . Infancia y Adolescencia* (p. 989). Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Aguilar, M., Martínez, J. y Aranda. C. (2000). Análisis de procedimientos estratégicos en la resolución de problemas. En A. Gámez, C. Macías y C. Suárez (Eds.), *Matemáticos y matemáticas para el tercer milenio: de la abstracción a la realidad. Actas del IX Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas Thales* (pp. 93-95). Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Aguilar, M. y Navarro. J. (2000). Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños. *Revista de Psicología General y Aplicada*, *53* (1), 63-83.

Andrich, D. y Styles, I. (1994). Psychometric evidence of intellectual growth in early adolescence. *Journal of Early Adolescence*, *14*, 328-344.

Barberá, E. (1997). Las estrategias de aprendizaje en el área de matemáticas. En C. Monereo (Coord.), *Estrategias de aprendizaje* (pp. 219-244). Madrid: Aprendizaje Visor.

Bermejo, V., Lago, M.O. y Rodríguez, P. (2000). La perspectiva constructivista en la enseñanza de las matemáticas. En J.N. García Sánchez (Coord.), *De la Psicología de la instrucción a las necesidades curriculares* (pp. 83-92). Barcelona: Oikos-Tau.

Carretero, M. y León, J.A. (2001). Del pensamiento formal al cambio conceptual en la adolescencia. En J. Palacios, A. Marchesi y C. Coll (Comp.), *Desarrollo psicológico y educación 1. Psicología evolutiva* (pp. 453-469). Madrid: Alianza Piscología.

Corral, A. (1986). La dificultad de enseñar el razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje*, *35-36*, 47-58.

Corral, A. (1987). El aprendizaje de la estrategia de comparación de proporciones. *Infancia y Aprendizaje*, *37*, 33-43.

Corral, A. (1993). Las matemáticas: fundamento de un desarrollo equilibrado. *Tarbiya*, *5*, 39-55.

Corral, A. y Tejero, L. (1986). Del pensamiento formal a la comprensión de la formalización matemática de la combinatoria, según dos organizaciones formales diferentes. *Revista de Psicología General y Aplicada*, *41*(6), 1.149-1.161.

Dixon, J.A. y Moore, C.F. (1996). Development role of intuitive principles of choosing mathematical strategies. *Developmental Psychology*, *32*, 241-253.

González-Pienda, J.A., Núñez, J.C., Álvarez, L., González-Pumariega, S. y Roces, C. (1999). Comprensión de problemas aritméticos en alumnos con y sin éxito. *Psicothema, 11* (3), 505-515.

Homs, O. (1995). *Exit y fracas a Catalunya*. Barcelona: CIREM.

INCE. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (2001). Resultados de la prueba de matemáticas de cuarto curso de la ESO. *Resumen Informativo del INCE, 8*, 1-7.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires: Paidós (1972).

Kitchener, K.S. y Fisher, K.S. (1990). A skill approach to the development of reflective thinking. En D. Khun (Ed.), *Developmental aspects of teaching and learning thinking skills. Contributions to human development* (pp. 324-361). Basilea, Suiza: Karger.

Lawson, A.E. (1976). Formal operation and Field Independence in a heterogeneous sample. *Perceptual and Motor Skill*, *42*, 981-982.

López Rupérez, F., Palacios Gómez, C., Brincones, I., Sánchez, J. y Garrote, R. (1986). Evolución del nivel piagetiano de desarrollo cognitivo en alumnos de bachillerato. Un estudio longitudinal. *Revista de Psicología General y Aplicada*, *41* (5), 849-870.

Lucangeli, D. y Cornoldi, C. (1997). Mathematics and Metacognition: What is the nature of the relationship? *Mathematical Cognition*, *3* (2), 121-139.

Navarro, J.I., Aguilar, M., Alcalde, C. y Howell, R. (1999). Problem solving and reflective-impulsive cognitive style in third grade students. *Psychological Reports*, *85*, 179-186.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. y Godino, J.D. (1997). Razonamiento combinatorio en alumnos de Secundaria. *Educación Matemática*, 8(1), 26-39.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Reston: NCTM.

Oliva, J.M. (1999). Concepciones de los alumnos en Física. Diferencias individuales. *Infancia y Aprendizaje*, *88*, 3-24.

Pérez de Landazábal, M.C.(1993). Influencia del contexto temático sobre problemas de física en 2º de B.U.P. *Tarbiya*, *4*, 7-32.

Pérez Echeverría. M.P., Carretero, M. y Pozo. J.I. (1986). Los adolescentes ante las matemáticas: proporción y probabilidad. *Cuadernos. de Pedagogía*, *133*, 9-13.

Piaget, J. (1970). La evolución intelectual entre la adolescencia y la edad adulta. En J. Delval (Comp.), *Lecturas de psicología del niño*, vol. 2 (pp. 208-213). Madrid: Alianza.

Piaget, J. (1972). *Problemas de psicología genética*. Barcelona: Ariel.

Pozo, J.I. y Carretero, M. (1989). Las explicaciones causales de expertos y novatos en historia. En M. Carretero, J.I. Pozo y M. Asensio (Comps.), *La enseñanza de las ciencias sociales* (pp. 139-163). Madrid: Visor.

Pozo, J.I., Asensio, M. y Carretero, M. (1986). ¿Por qué prospera un país? Un análisis cognitivo de las explicaciones en Historia. *Infancia y Aprendizaje*, *32*, 23-41.

Raviolo, A., Siracusa, P., Herbel, M. y Schnersch, A. (2000). Desarrollo de razonamientos científicos en la formación inicial de maestros. *Revista Interuniversitaria de Formación de Profesorado*, *38*, 129-140.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J.D. y Cañizares, M.J. (1997). Estrategias de resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, 36, 433-446.

Rodríguez Moneo, M. (1999). *Conocimiento previo y cambio conceptual*. Buenos Aires: Aique.

Sáenz, C. y León, G.O. (1998). El sistema de ideas probabilísticas de los adolescentes. *Estudios de Psicología*, 59, 25-44.

Schnotz, W., Vosniadou, S. y Carretero, M. (1999). *New perspectives on conceptual change*. Oxford: Elsevier.

Serrano, T. y Blanco, A. (1988). *Las ideas de los alumnos en el aprendizaje de las ciencias*. Madrid: Narcea.

Siegler, R. (1991). *Children's thinking*. Nueva York: Prentice-Hall.

Tobin, K.G. y Capie. W. (1981). Development and validation of a group test of Logical Thinking. *Educational and Psychological Measurement*, *41*, 413-424.

Vázquez, S.M. (1990). Rendimiento escolar, estilos cognitivos y pensamiento formal. *Revista Española de Pedagogía*, *187*, 461-479.

Whimbey, A. y Lochhead, J. (1993). *Comprender y resolver problemas*. Madrid: Aprendizaje Visor.