Revista Electrónica de Metodología Aplicada
1999, Vol. 4 nº 1, pp. 19-43
URL:http://www3.uniovi.es/~Psi/REMA/v3n1/a2v3n1.wp5

ANALISIS DE LA CONGRUENCIA FACTORIAL EN VARIAS MUESTRAS INDEPENDIENTES

Teresa Rivas Moya
Facultad de Psicología
Universidad de Málaga
e-mail:moya@uma.es

ABSTRACT

Over the years, questions have arisen regarding the application of factorial analysis, one of which is its application in the study of factorial structure obtained from several independent samples.

This paper presents the Simultaneous Component Analysis (SCA) which simultaneously analyses the factorial structure of the same variables in several groups. Once the items have been selected in such a way that the factorial structure remain identifiable in the different groups, discriminant analysis can then determine the group of subjects with whose characteristics the remaining groups are identified. The advantages and drawbacks of this method are discused.

Results are given following the application of a self-conciousness self-report to three independent random subject samples.

Finally, this procedure is proposed to analyse exploratory factorial congruence in independent samples before to determine the target population or to make confirmatory analysis of factorial structure in several independent samples.

Keywords: Factorial structure in independent groups, Simoultaneous Component Analysis, Discriminant Analysis.

1. Introducción

En el estudio de la validez de constructo son usuales dos aplicaciones del análisis factorial, por un lado, cuando se trata de demostrar la estabilidad entre poblaciones de las estructuras factoriales latentes, de forma que si difieren en distintas poblaciones de individuos la validez de constructo es cuestionable. Y, por otro, cuando se trata de comprobar la evolución de la estructura latente en distintos grupos, en cuyo caso la validez se cuestionará si la estructura se mantiene estable.

En el primer caso se puede elegir entre distintas aproximaciones que se enumeran a continuación, aunque no se pretende dar una clasificación excluyente y exhaustiva.

1.- Obtener un índice de similaridad o congruencia entre factores a partir de las columnas de las matrices de saturaciones, obtenidas independiente o simultáneamente en cada grupo, generalmente después de una rotación.

Cureton y D´Agostino (1983, pp. 382-383) proponen utilizar este índice cuando las variabilidades de las puntuaciones en los distintos grupos no son muy diferentes y por tanto, que las saturaciones en los distintos grupos son comparables. De no ser así, sugieren utilizar el procedimiento de Ahmavaara (1954), que consiste en realizar una transformación de Procusto o una transformación lineal - no necesariamente una rotación - de una matriz factorial sin rotar en un grupo a otro seleccionado como *criterio,* para hacer la estructura en el primer grupo tan similar como sea posible a la del segundo, tomada ésta como matriz hipótesis. Posteriormente se puede comparar el acuerdo entre las dos estructuras mediante el coeficiente de congruencia.

2.- Realizar estudios descriptivos que obtienen simultáneamente los componentes de un conjunto de variables en todos los grupos y establecer comparaciones entre las columnas de la matriz patrón, estructura o de puntuaciones en los componentes, a partir de las matrices de correlación entre las mismas variables en los distintos grupos, mediante el Análisis de Componentes Simultáneos (SCA). Posteriormente a la solución así obtenida se puede aplicar un índice de Congruencia, pero no se considera necesario, porque este análisis proporciona el porcentaje de varianza explicada simultáneamente en todos los grupos, que es ya un índice del grado de 'congruencia entre las soluciones'.

3.- Utilizar métodos Procusto de rotación factorial para obtener la máxima congruencia de una matriz patrón factorial en una segunda población a partir de la matriz patrón factorial en una primera población y posteriormente obtener índices de congruencia de las soluciones así obtenidas. Puesto que estos métodos *fuerzan u obligan a que* la solución factorial obtenida en la segunda población sea la que mejor se ajusta, en el sentido de mínimos cuadrados, a la definida en la población objetivo, los coeficientes de Congruencia resultantes suelen ser excesivamente altos (Paunonen, 1997 ; p.34). Además se añade que, para aplicar uno de estos métodos la matriz hipótesis, objetivo o *target,* debe estar definida con garantías suficientes de que se puede asumir como tal, por ejemplo después de que lo avalen distintos estudios exploratorios y descriptivos, utilizando en este caso la aproximación dada en el apartado 2.

4.- Utilizar uno de los métodos de análisis de matrices de covarianza, basados en supuestos acerca de las distribuciones subyacentes, Jöreskog y Sörbon (1979), Meredith (1993) y McArdle y Cattell (1994).

Si en estudios con diferentes muestras de una población, los items que forman la estructura factorial obtenida en cada muestra son los mismos (intra población) y/o se puede suponer que las variables en la población siguen una determinada distribución, es posible aplicar alguna de las dos últimas aproximaciones. Si en diferentes muestras los items no se mantienen en la estructura intra población, es necesario llevar a cabo inicialmente estudios descriptivos y exploratorios intra y entre muestras extraídas de distintas poblaciones.

En este estudio se analiza la estabilidad de las soluciones en distintas muestras, con carácter exploratorio y descriptivo, por lo que nos restringimos a las dos primeras aproximaciones y se realiza un análisis a posteriori para determinar el grupo con el que se identifican los restantes grupos. Si esto se ratifica en posteriores estudios, con muestras extraídas de la misma población, la estructura obtenida en dicha muestra se puede asumir como matriz objetivo.

A continuación se presentan los conceptos fundamentales de SCA y se muestra una aplicación a partir de las respuestas a los items de un autoinforme de autoconcepto, en tres muestras independientes de escolares, obteniéndose la congruencia 1) Aplicando los distintos índices de congruencia a las soluciones factoriales obtenidas independientemente en cada muestra, con PCA separados, después de rotar a la estructura simple y una vez probada la homogeneidad de las muestras en los ítems que definen la solución factorial 2) Obtenida una estructura *similar* en las distintas muestras, se proporciona el porcentaje de varianza explicado por la solución de Análisis de Componentes Simultáneos. Además, se analiza la relación entre los grupos atendiendo a los items que definen los componentes. Para ello, a partir de la solución obtenida con SCA en las tres muestras, se realiza un análisis a posteriori, basado en el Análisis Discriminante que permite 2.1) detectar los items que identifican y los que diferencian a los sujetos de las distintas muestras o grupos y 2.2) obtener el grupo de sujetos con el que se han identificado los restantes grupos .

2. Índices de Congruencia basados en Análisis de Componentes

Tras aplicar análisis de Componentes Principales separados en cada muestra de sujetos, se pueden calcular distintos índices de congruencia para obtener la similaridad entre los patrones de saturaciones factoriales.

Guadagnoli y Velicer (1991) realizan una comparación del índice *de Congruencia C de Tucker* (Burt,1948 ; Tucker, 1951 ; Wigley y Neuhaus, 1955), el *estadístico S* (Cattell, 1949; Cattell y Baggaley, 1960; Cattell, Balcar, Horn y Nesslroade, 1969), el *coeficiente de Correlación r de Pearson* (Cliff, 1966) y la *medida de Acuerdo Kappa* (Cohen, 1960), en función del tamaño de las saturaciones, el tamaño muestral, el número de componentes o factores y el número de variables que definen los factores. Paunonen (1997) presenta los resultados de un estudio de simulación con Monte Carlo en el que analiza los efectos de los factores anteriores sobre el Coeficiente de Congruencia C, cuando éste se utiliza para obtener congruencia factorial, después de aplicar un método de rotación factorial de Procusto y encuentra que todos influyen sobre el valor de C obtenido, salvo el número de factores que influye en interacción con el tamaño de los valores de los pesos de la matriz patrón. Además presenta una extensa revisión de los estudios realizados acerca de este coeficiente, mostrando que otras alternativas propuestas como el coeficiente de Kaiser, Hunka y Bianchini (1971) presentan otras deficiencias (ver Barrett, 1986 ; Bijnen y Poortinga, 1988; ten Berge, 1996). Davenport (1990) critica el índice C debido a la subjetividad que conlleva su interpretación y sugiere que tests de significación acerca de este índice pueden ser inapropiados, ya que se puede encontrar índices estadísticamente significativos entre factores que son diferentes. Anteriormente, Broadbooks y Elmore (1987) analizan con un estudio de simulación de Monte Carlo los efectos del tamaño muestral, el número de variables y el valor del coeficiente de Congruencia sobre la distribución muestral de este coeficiente, mostrando que el coeficiente está sesgado en función del tamaño de estos efectos.

Ten Berge (1986a, pp. 32-33 ; 1996, p.5) se muestra a favor de este índice y ten Berge (1986b, p.43) lo utiliza puntualmente en un estudio sobre congruencia hacia una matriz objetivo.

Sobre la *medida de Acuerdo Kappa* destaca la dificultad que conlleva su interpretación, cuando las marginales no son simétricas y no fijadas a priori, o sea libres, ya que en tales condiciones su valor máximo no es uno (Brenann y Prediger, 1981), aunque éstos proponen un índice alternativo para resolver este inconveniente. Respecto de este índice de congruencia y del estadístico *S,* destaca no obstante la subjetividad para determinar los puntos de corte que definen las categorías de saturaciones altas y bajas (generalmente ±0,30).

La utilización de tests de hipótesis estadísticos acerca de los valores de cualquiera de estos coeficientes, conlleva el estudio de la distribución de las poblaciones subyacentes a las muestras. Puesto que el estudio que se presenta es descriptivo, nos restringimos a la interpretación de los mismos en las muestras obtenidas.

No existe una decisión unánime en la bibliografía revisada acerca de la utilización de estos índices y de los tests de hipótesis sobre los mismos, por lo que el estudio de su adecuación sigue siendo objeto de discusión. Antes de tomar una decisión se necesita unificar las conclusiones extraídas en diferentes estudios, bajo distintas condiciones (análisis PCA separados con o sin estructura simple, análisis de transformaciones Procusto a una matriz objetivo, tras rotaciones ortogonales u oblicuas, obtenidos sobre la matriz patrón o de estructura, etc.).

Las expresiones para obtener estos índices, así como las pautas para su interpretación se presentan en el Apéndice 1.

Otra aproximación para el estudio de la congruencia, compatible con la obtención de los índices anteriores, se lleva a cabo con el Análisis de Componentes Simultáneos. Este proporciona el porcentaje de varianza explicada por cada componente, simultáneamente en todas las poblaciones o grupos. En el siguiente apartado se muestran los conceptos básicos acerca del mismo.

3. Generalización del Análisis de Componentes de Pearson: Análisis de Componentes Simultáneos

Usualmente los componentes se obtienen independientemente en cada grupo con el Análisis de Componentes Principales (PCA) de Hotelling (1933, 1936). La aproximación de Hotelling obtiene sucesivamente combinaciones lineales de variables con varianza máxima. Dada **Z** la matriz de puntuaciones estandarizadas de *n* sujetos, medidos en *p* variables y **R** = n^{-1}**Z'Z** la matriz de correlaciones asociada, la propiedad más importante y útil de los componentes es que *la suma de los r (r<p) primeros autovalores dividida por la suma de todos ellos (traza* de **R***)*, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \Big/ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$, representa la proporción de la variación total explicada por las *r* primeras componentes principales (Mardia, Kent y Bibby, 1979; p. 218).

Los componentes de Hotelling tienen la propiedad de que la suma de las correlaciones al cuadrado entre los componentes y las variables es máxima. Este es el objetivo en la obtención de los componentes con la aproximación de Pearson (1901), desarrollada posteriormente por Eckart y Young (1936), que determina los componentes de forma que expliquen la mayor cantidad de varianza de las variables, mediante ajuste de mínimos cuadrados óptimo. Bajo esta aproximación se obtienen *r* combinaciones lineales óptimas, a partir de las cuales se puede reconstruir la información de las variables en el sentido de mínimos cuadrados. Para ello, trata de encontrar la matriz **F** (*n* x *r), r<p*, que mejor resume la información de la matriz original de datos **Z,** en el sentido de la regresión múltiple que minimiza la expresión (1) (Ver Apéndice 2)

Millsap y Meredith (1988) generalizan el método PCA de Pearson, para obtener simultáneamente componentes comunes a un conjunto de variables en dos o más muestras u ocasiones. Precursores de este método son el *Análisis de la Congruencia Perfecta (PECON)* (ten Berge, 1986b) y el *Método de Múltiples Grupos (MGM)* (Nunnally, 1987).

Kiers y ten Berge (1989) basándose en el método de Millsap y Meredith, proponen algoritmos de Mínimos Cuadrados Alternos, para calcular la solución con muestras de tamaño pequeño y grande, y obtienen cotas superiores e inferiores para la función de pérdida. Garantizan que el algoritmo converge a un punto estacionario, pero no así la convergencia a un mínimo global. Denominan a esta aproximación *Análisis de Componentes Simultáneos (SCA)* y Kiers (1990) realiza un programa (SCA) para llevar a cabo la obtención de estos componentes.

SCA obtiene los componentes comunes en los distintos grupos, imponiendo la restricción de invarianza a una matriz que “capta” la interpretación de los componentes. Obtenidos a partir de SCA, éstos explican de forma óptima la información de las variables en todos los grupos simultáneamente, utilizándose los mismos pesos en las mismas variables para definir los componentes en todos los grupos, por tanto los componentes tienen la misma interpretación en todos ellos.

Kiers y ten Berge (1994) y ten Berge y Kiers (1996) analizan las soluciones SCA-W, SCA-S y SCA-P (Ver Apéndice 2) y la relación jerárquica existente entre el porcentaje de varianza explicada por distintos métodos, estableciendo que

$$\sigma^2\text{PCA-sep} \geq \sigma^2\text{SCA-W} \geq \sigma^2\text{SCA-P} \geq \sigma^2\text{SCA-S}$$

Kiers y ten Berge (1994, pp. 124-125) concluyen que SCA-W no discrimina suficientemente si se obtiene la misma estructura en todos los grupos. Con respecto a SCA-P aun no se ha probado la diferencia que debe existir con respecto a los PCA separados, para que se pueda mostrar como un indicador de la diferencia de las matrices de correlación entre grupos. Ambos procedimientos proporcionan pesos en los componentes comunes y se pueden utilizar para obtener componentes con la misma definición. En estos posteriormente se analizará su similaridad entre grupos. Sugieren que si se pretende obtener una estructura común entre grupos, se debe llevar a cabo con SCA-S. Por ello, en la aplicación que se muestra a continuación, se ha aplicado este procedimiento, después de haber depurado los items con análisis PCA independientes en cada muestra.

La interpretación acerca de si los Componentes Simultáneos resumen adecuadamente la información en todos los grupos, se lleva a cabo con la varianza explicada por los componentes de SCA en cada grupo. Si estos Componentes explican una considerable cantidad de la varianza original y los componentes obtenidos con PCA separados en cada población no explican mucho más de esta varianza, se puede concluir que los mismos *pesos de los componentes* se pueden utilizar en todos los grupos, para describir adecuadamente la información original de las variables.

Al fijar la atención en los aspectos comunes a todos los grupos, SCA no detecta diferencias importantes que pueden existir entre ellos. Es decir, SCA define componentes que son comparables en los diferentes grupos o poblaciones, pero no analiza cómo se comportan los componentes en los distintos grupos, por lo que se necesita un análisis a posteriori.

4. Análisis a posteriori al SCA

Con objeto de analizar las diferencias y/o semejanzas en los grupos, en función de los items que definen los componentes, se propone realizar un análisis a posteriori al Análisis de Componentes Simultáneos. A partir de las puntuaciones de los sujetos en los ítems o en componentes obtenidos con SCA, el Análisis Discriminante determina: 1) las áreas o ítems que diferencian o identifican los grupos y 2) el grupo de sujetos con el que se identifican o diferencian los restantes (Klecka, 1982). Es necesario mostrar la adecuación de esta técnica, para lo cual las respuestas a los ítems deben ser continuas, o estar dadas al menos en escala de intervalo y tener variabilidad suficiente. Asímismo se debe probar que las matrices de varianzas y covarianzas de los ítems en los grupos provienen de la misma población. Bajo estas dos condiciones, las *funciones discriminantes* proporcionan los ítems que permiten diferenciar y/o identificar los grupos, obteniéndose además *una clasificación global* y otra *individual* de los sujetos, lo que permite explicar en qué medida los grupos no quedan perfectamente identificados, y si es necesario, un análisis de cada sujeto para determinar el grupo en que estaría mejor clasificado, en función de sus respuestas a los ítems.

5. Aplicación

Se analizan las respuestas dadas a 36 items del autoinforme para evaluar el autoconcepto, basado en Harter (1985) y adaptado por García (1992), en tres grupos de la población escolar malagueña, diferenciados entre sí por el barrio de residencia - marginal o no - y el colegio al que acuden, de forma que los tres grupos resultantes quedan definidos como sigue: residentes en zona marginal que estudian en el colegio del barrio (P-P); residentes en la zona marginal que estudian en colegios fuera del barrio (P-E) y no residentes en la zona marginal que estudian en colegios fuera del barrio (E-E). Las categorías de cada ítem varían desde *nada* (la afirmación es falsa para ti) hasta *mucho* (es muy cierta para ti) y se han puntuado respectivamente de 1 a 7.

El tamaño de los grupos se ha determinado con muestreo aleatorio estratificado, con asignación proporcional, en las respectivas poblaciones de escolares de edades comprendidas entre 12 y 16 años, de ambos sexos (225 niños y 439 niñas) que cursan 7º y 8º de E.G.B. y 1º y 2º de E.S.O., obteniéndose que el número de sujetos de los grupos es 183 en el grupo P-P, 85 en P-E y 396 en E-E. Siendo la edad media 13,29, 13,34 y 13,42 años y la desviación típica 0,94, 1,03 y 0,91 años, respectivamente en cada grupo.

6. Resultados

En el apartado 6.1 se muestran los resultados de aplicar el Análisis de Componentes principales de Hotelling en cada grupo y los valores de los índices de Congruencia en cada par de componentes. Posteriormente se presentan los resultados de aplicar SCA en los tres grupos simultáneamente (apartado 6.2) y el análisis a posteriori (apartado 6.3).

6.1. Congruencia a partir de los índices

Para calcular los índices de Congruencia clásicos, en primer lugar se han obtenido los Componentes de Hotelling con rotación Varimax en cada grupo, con el paquete estadístico SAS; a partir de las correlaciones entre pares de items.

El gráfico de Cattell (1966) sugiere seleccionar la solución inicial (36 items) con 3, 4 y 5 componentes. A partir de estas tres soluciones, tras sucesivos análisis de los índices de homogeneidad (correlación ítem - total), de las saturaciones de los items en los componentes y atendiendo al contenido de los items que definen cada componente, se ha seleccionado la solución de tres componentes y el autoinforme ha quedado restringido a 21 items. Los criterios que se han seguido para la selección de los items han sido eliminar aquellos que presentan saturaciones inferiores a 0,30 en un componente - en un grupo - y esto es así en al menos dos grupos, y aquellos cuya homogeneidad con el resto de los items de la escala es, en cada grupo, inferior a 0,30. La solución final se muestra en la Tabla 1.

	P-P				P-E				E-E		
It	Fact1	Fact2	Fact3	It	Fact1	Fact2	Fact3	It	Fact1	Fact2	Fact3
1	**0'748**	0'023	0'039	1	-0'073	**0'780**	0'109	1	**0'716**	0'100	0'004
2	-0'123	0'044	**0'668**	2	0'158	-0'022	**0'601**	2	0'113	0'105	**0'681**
3	0'143	0'208	**0'583**	3	0'263	0'063	**0'513**	3	0'068	0'228	**0'702**
4	0'206	**0'720**	0'198	4	**0'803**	-0'022	0'215	4	0'131	**0'781**	0'188
5	**0'558**	0'203	0'042	5	0'209	**0'656**	-0'017	5	**0'595**	0'283	0'038
6	-0'069	0'154	**0'559**	6	0'152	0'052	**0'529**	6	0'069	-0'066	**0'681**
7	0'152	0'181	**0'633**	7	0'208	0'122	**0'582**	7	0'073	0'243	**0'660**
8	0'164	**0'728**	0'042	8	**0'648**	0'064	0'290	8	0'110	**0'703**	0'222
9	**0'683**	0'224	0'020	9	0'193	**0'592**	-0'098	9	**0'719**	0'062	0'161
10	**0'545**	0'215	0'319	10	-0'033	**0'429**	0'175	10	**0'458**	0'155	0'269
11	0'166	-0'031	**0'593**	11	-0'046	0'069	**0'655**	11	0'192	0'123	**0'626**
12	0'131	**0'830**	0'108	12	**0'854**	0'161	0'212	12	0'150	**0'847**	0'200
13	0'054	0'084	**0'588**	13	-0'013	-0'040	**0'601**	13	-0'135	0'272	**0'387**
14	-0'020	**0'816**	0'158	14	**0'807**	0'067	0'239	14	0'166	**0'839**	0'137
15	**0'778**	0'056	0'077	15	0'016	**0'813**	0'024	15	**0'798**	0'042	0'064
16	0'209	**0'668**	0'109	16	**0'747**	0'124	-0'034	16	0'142	**0'705**	0'077
17	**0'616**	-0'005	0'228	17	-0'198	**0'567**	0'221	17	**0'631**	-0'047	0'007
18	0'060	-0'005	**0'546**	18	0'067	-0'038	**0'558**	18	-0'103	0'152	**0'439**
19	0'231	**0'423**	0'335	19	**0'754**	-0'037	0'000	19	0'070	**0'650**	0'148
20	**0'769**	0'108	-0'005	20	0'116	**0'692**	-0'141	20	**0'726**	0'160	0'056
21	**0'608**	0'276	0'202	21	0'113	**0'738**	-0'024	21	**0'725**	0'126	0'100
% var	18'42	16'06	13'84		18'56	17'46	12'88		18'50	18'35	13'73
% var tot		48'33				48'9				50'6	

Tabla 1. Solución factorial rotada con PCA de Hotelling

Los porcentajes de varianza global explicada tras realizar PCA de Hotelling independientes son en P-P (48'33), P-E (49'90) y E-E (50'59). En los grupos P-P y E-E los factores aparecen en el mismo orden y se han denominado, respectivamente, *realización escolar*, *apariencia física y popularidad*, en tanto que, en el grupo P-E sólo cambia el orden de los dos primeros factores (*apariencia física, realización escolar y popularidad*) .

Los tres componentes obtenidos en cada uno de los grupos de sujetos se denotan C1', C2', C3' en el grupo P-P; C1'', C2'', C3'' en el grupo P-E y C1''', C2''', C3''' en el grupo E-E. A partir de las expresiones de los coeficientes de Congruencia dadas en el Apéndice 1, se obtienen los coeficientes de la tabla 2.

	C	*r*	*S*	κ
C_1'-C_2''	**0'930**	**0'873**	**1**	**1**
C_1'-C_1'''	**0'966**	**0'930**	**1**	**1**
C_2''-C_1'''	**0'979**	**0'844**	**1**	**1**
C_2'-C_1''	**0'960**	**0'935**	**1**	**1**
C_2'-C_2'''	**0'957**	**0'913**	**1**	**1**
C_1''-C_2'''	**0'960**	**0'936**	**1**	**1**
C_3'-C_3''	**0'927**	**0'872**	**1**	**1**
C_3'-C_3'''	**0'944**	**0'899**	**1**	**1**
C_3''-C_3'''	**0'936**	**0'874**	**1**	**1**

Tabla 2. Índices de congruencia clásicos

Los valores de la tabla 2 muestran que la congruencia es mayor que 0,80 entre los pares de componentes, aplicando los índices de congruencia *C, Kappa, S* y *r* a los componentes obtenidos con PCA independientes. Ello indica una alta congruencia entre pares de componentes en cada grupo, pero no se obtiene información del comportamiento de todos los componentes ni del porcentaje de varianza explicado en los tres grupos simultáneamente.

6. 2. Congruencia a partir del Análisis de Componentes Simultáneos

La tabla 3 muestra los resultados obtenidos con el programa SCA (Kiers, 1990), a partir de las matrices de correlación entre los 21 items en cada uno de los grupos (Ver Apéndice 3).

Comparando los resultados obtenidos con PCA de Hotelling (Ver tabla 1) y los de la tabla 3, se observa que las estructuras factoriales coinciden en las tres muestras.

Los porcentajes de varianza explicada a partir de PCA de Pearson son:en P-P (48,08%) P-E (48,69%) y E-E (50,35%), y a partir de SCA son P-P (48,33%), P-E (48,90%) y E-E (50,59%). Puesto que en la solución final no disminuye en exceso el porcentaje de varianza explicada por los componentes, se considera que se ha obtenido una estructura similar en los tres grupos. Además el porcentaje de varianza total explicada por SCA, antes y después de las iteraciones, es constante (49,04%) y coincide con la obtenida mediante PCA separados de Hotelling.

		P-P				P-E				E-E	
It	**Fact1**	**Fact2**	**Fact3**	**It**	**Fact1**	**Fact2**	**Fact3**	**It**	**Fact1**	**Fact2**	**Fact3**
1	0'161	**0'729**	0'071	1	0'020	**0'778**	0'119	1	0'196	**0'733**	0'114
2	0'132	-0'015	**0'656**	2	0'240	-0'008	**0'638**	2	0'281	0'138	**0'676**
3	0'334	0'221	**0'637**	3	0'338	0'084	**0'589**	3	0'384	0'153	**0'722**
4	**0'773**	0'345	0'323	4	**0'822**	0'039	0'328	4	**0'821**	0'247	0'368
5	0'304	**0'592**	0'058	5	0'258	**0'648**	0'066	5	0'373	**0'634**	0'148
6	0'211	0'047	**0'575**	6	0'233	0'061	**0'568**	6	0'131	0'078	**0'619**
7	0'317	0'235	**0'681**	7	0'308	0'135	**0'643**	7	0'386	0'160	**0'694**
8	0'702	0'286	0'140	8	**0'710**	0'112	0'354	8	**0'749**	0'219	0'370
9	0'336	**0'709**	0'109	9	0'208	**0'621**	0'017	9	0'237	**0'716**	0'202
10	0'354	**0'598**	0'405	10	0'059	**0'433**	0'188	10	0'271	**0'497**	0'349
11	0'110	0'217	**0'608**	11	0'074	0'095	**0'642**	11	0'282	0'225	**0'642**
12	**0'837**	0'296	0'263	12	**0'896**	0'209	0'341	12	**0'890**	0'276	0'389
13	0'215	0'096	**0'580**	13	0'115	-0'030	**0'558**	13	0'271	-0'030	**0'493**
14	**0'801**	0'158	0'280	14	**0'854**	0'112	0'349	14	**0'869**	0`282	0'340
15	0'221	**0'785**	0'169	15	0'086	**0'815**	0'075	15	0'145	**0'795**	0'049
16	**0'722**	0'330	0'191	16	**0'734**	0'169	0'106	16	**0'719**	0'250	0'253
17	0'154	**0'616**	0'281	17	-0'088	**0'567**	0'186	17	0'036	**0'623**	0'112
18	0'125	0'089	**0'534**	18	0'174	-0'021	**0'523**	18	0'189	-0'034	**0'503**
19	**0'565**	0'305	0'342	19	0'721	0'024	0'150	19	0'655	0'182	0'321
20	0'268	**0'771**	0'088	20	0'138	**0'696**	-0'058	20	0'257	**0'741**	0'048
21	0'412	**0'683**	0'286	21	0'169	**0'730**	0'072	21	0'274	**0'736**	0'186
% var	4'290	4'485	3'429		4'318	3'740	3'096		4'783	4'298	3'707

Tabla 3. Solución factorial rotada con SCA

6.3. Análisis a posteriori a SCA

Se aplica Análisis Discriminante a los 21 ítems y a los tres grupos de sujetos (P-P, P-E, E-E), considerando la probabilidad a priori de asignación de los sujetos a cada grupo proporcional al tamaño del mismo (0,2756, 0,1280, 0,5964). La significación $\alpha = 0,06$ del test M de Box indica que las matrices de varianzas y covarianzas provienen de la misma población. La tabla 4 muestra que los ítems (1, 2, 6, 9, 11 , 12 , 13, 14, 15, 18, 21) forman parte de la función discriminante (F de entrada >1), y por tanto que diferencian los grupos, indicando los valores Lambda de Wilks - entre 0,88 y 0,90 - el poco efecto de los ítems para diferenciar los grupos, como se pretende en esta aplicación.

ITEMS EN LA FUNCIONES DISCRIMINANTES

ITEMS	F DE SALIDA	λ DE WILKS
1	2’3265	0’89124
2	1’1523	0’88804
6	1’8111	0’88983
9	2’5696	0’89190
11	1’8620	0’88997
12	5’2308	0’89913
13	7’7164	0’90589
14	6’6308	0’90294
15	2’6070	0’89200
18	3’0358	0’89316
21	1’7067	0’88955

ITEMS QUE NO ESTAN EN LAS FUNCIONES DISCRIMINANTES

ITEMS	F DE ENTRADA	λ DE WILKS
3	0’82469	0’88267
4	0’49130	0’88358
5	0’19404	0’88438
7	0’12439	0’88457
8	0’27881	0’88415
10	0’52706	0’88348
16	0’34466	0’88397
17	0’46938	0’88363
19	0’50013	0’88355
20	0’04810	0’88478

Tabla 4. Distribución de los items

En la tabla 4 se observa que los grupos no difieren en los items 3, 4, 5, 7, 8, 10, 16, 17, 18, 19, pues no entran a formar parte de las funciones discriminantes (F de entrada <1).

La tabla 5 muestra que los ítems que mejor diferencian los grupos P-P y P-E son e1 13 y 14 (en la función discriminante 1) y los que mejor diferencian los grupos P-E y E-E son el 9, 12 y 15 (en la función discriminante 2) .

La correlación canónica entre las funciones discriminantes y los grupos que éstas separan es, respectivamente, 0,2927 y 0,1793, que es otra medida del escaso efecto que tienen estas funciones discriminantes para diferenciar los grupos.

Por último, la tabla 6 muestra la clasificación de los sujetos e informa de su asignación a los grupos. Se observa que el mayor número de sujetos de los grupos P-P y P-E se identifican, en los items seleccionados por el Análisis Discriminante, con el grupo E-E.

ITEM	FUNCIÓN 1	FUNCIÓN 2
1	0’36885	0’13380
2	-0’19996	0’20860
6	0’21257	-0’32552
9	0’27730	**-0’41783**
11	-0’27503	0’20575
12	-0’42442	**-0’84528**
13	**0’54141**	-0’19152
14	**0’63935**	0’59579
15	0’11597	**0’65216**
18	0’34578	-0’14908
21	-0’27339	0’20574

Evaluación de las funciones discriminantes en las medias de los grupos

P-P	**0’4927**	-0’0292
P-E	**-0’2642**	**-0’4479**
E-E	-0’1709	**0’1096**

Tabla 5. Coeficientes estandarizados de la función discriminante y evaluación en las medias de los grupos

GRUPO ACTUAL	Nº DE CASOS	GRUPO PRONOSTICADO		
		P-P	P-E	E-E
P-P	183	41 22’4 %	1 0’5 %	**141** 77’0 %
P-E	85	6 7’1 %	2 2’4 %	**77** 90’6 %
E-E	396	24 6’1 %	4 1’0 %	**368** 92’9 %

Tabla 6. Clasificación global

7. Discusión

El SCA ha proporcionado más información que los índices de Congruencia clásicos, siendo los valores de estos coeficientes bastante aceptables. SCA obtiene índices del grado de similaridad en función del porcentaje de varianza explicada. Posteriormente, y con carácter complementario, se ha aplicado a los mismos items Análisis Discriminante. Este análisis externo ha seleccionado los items en los que se identifican los grupos y ha determinado el grupo con el que se identifican los restantes, así como los sujetos de cada grupo que quedan sin identificar. De esta forma se ha obtenido información más precisa del efecto de los items sobre los grupos.

La estructura común obtenida con SCA ha explicado el 48,33%, 48,90% y 50,59% de la varianza en los grupos P-P, P-E y E-E respectivamente. Ahora bien ¿esta estructura común lo es por igual en los tres grupos o existe alguno en el que tiene más peso?. A este interrogante ha respondido el Análisis Discriminante mostrando que :

a) Los grupos no se diferencian en los items 3,4,5,7,8,10,16,17,18,19 ya que no se han incluido en las Funciones Discriminantes.

b) Existe una relación débil entre los grupos y las Funciones Discriminantes, como indican los índices Lambda de Wilks y la correlación canónica. Entonces los items 1,2,6,9,11,12,13,14,15,18,21, incluidos en las Funciones Discriminantes, no permiten diferenciar bien los grupos.

Por tanto, la estructura obtenida es más semejante, en los tres grupos, en los items 3,4,5,7,8,10,16,17,18,19 que en los restantes.

Además, con respecto a los items 1,2,6,9,11,12,13,14,15,18,21 en los que los grupos muestran alguna diferencia, se observa en la tabla 6 que los grupos P-P y P-E se identifican con el E-E. Es decir, en función de las respuestas a estos items, de los 183 sujetos del grupo P-P 141 deberían pertenecer al E-E, de los 85 sujetos del grupo P-E 77 deberían pertenecer al grupo E-E y de los 396 sujetos del grupo E-E quedarían 368 en este grupo. En función de estos resultados, se está identificando la estructura con la del grupo E-E.

No obstante, queda sin responder la cuestión acerca de si el contenido de los items está sesgado, hacia el grupo E-E y ello favorece la identificación de los grupos P-P y P-E con E-E.

Los anteriores resultados se han obtenido para los items 1,2,6,9,11,12,13,14,15,18,21 con el método 'paso a paso', con el método 'enter' se pueden analizar los resultados con todos los items. Si no se cumplen las condiciones para la aplicación de esta técnica, se debería utilizar a posteriori la más adecuada, con objeto de obtener información acerca de las relaciones entre los items y los grupos después de aplicar SCA.

Determinar el grupo con el que se identifican los restantes en los componentes obtenidos con SCA, es de suma importancia para posteriormente, cuando se tenga garantías de que la estructura del instrumento de medida se mantiene estable y la población objetivo o target se ha identificado, planificar análisis que permitan confirmar que dicha estructura se puede generalizar a las respectivas poblaciones. Estos análisis se llevarían a cabo con las aproximaciones planteadas en los apartados 3 y 4 de la introducción.

Por último, se propone esta metodología para llevar a cabo estudios exploratorios de congruencia factorial, en grupos independientes de sujetos, antes de determinar la población objetivo o realizar análisis confirmatorios de congruencia factorial.

8. Referencias

Ahmavaara, Y. (1954). Transformation analysis of factorial data. Annales **Academiae Scientiarum Fennicae, Series B 88**, 2.

Barrett, P. (1986). Factor comparison: An examination of three methods. **Personality and Individual Differences, 7**, 327-340.

Bijnen, E.J. y Poortinga, Y.H. (1988). The questionable value of cross-cultural comparisons with the Eysenck Personality Questionnaire. **Journal of Cross-Cultural Psychology, 19**, 193-202.

Brenann, R. L. & Prediger, D.J. (1981). Coefficient Kappa : Some uses, misuses and alternatives. **Educational and Psychological Measurement, 4**, 687-699.

Broadbooks, W. J. & Elmore, P.B. (1987). A Monte Carlo study of the sampling distribution of the Congruence Coeficient, **Educational and Psychological Measurement, 47**, 1-11.

Burt, C. (1948). The factorial study of temperamental traits. **British Journal of Psychology, tatistical Section, 1**, 178-203.

Cattell, R. B. (1949). A note on factor invariance and the identification of factors. **British Journal of Psychology, 2**, 134-138.

Cattell, R. B. (1966). The scree test for the number of factors. **Multivariate Behavioral Research, 1**, 245-276.

Cattell, R. B. (1978). **The scientific use of factor analysis in behavioral and life sciences**. Nueva York: Plenum Press.

Cattell, R. B. y Baggaley, A. R. (1960). The salient variable similarity index for factor matching. **British Journal of StatisticalPsychology, 13**, 33-46.

Cattell, R. B., Balcar, K. R., Horn, J. L. y Nesselroade, J.R. (1969). Factor matching procedures: An improvement of the "*s*" index; with tables. **Educational and Psychological Measurement, 29**, 781-792.

Cliff, (1966). Orthogonal rotation to congruence. **Psychometrika, 31**, 33-42

Cohen, J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scales. **Educational and Psychological Measurement, 20**, 37-46.

Cureton, E.E. y D'Agostino, R.B. (1983). **Factor Analysis: An applied approach**. London: Lawrence Erlbaum Associates

Davenport, , E.C. (1990). Significance testing of Congruence Coefficients : A good idea ?. **Educational and Psychological Measurement, 50**, 289-296.

Eckart, C. y Young, G. (1936). The approximation of one matrix of another of lower rank. **Psychometrika, 1**, 211-218.

García, B. (1992). **Autoinforme de autoconcepto: Como soy**. Universidad Complutense de Madrid. (sin publicar)

Guadagnoli, E. y Velicer, W. F. (1991). A Comparison of Pattern Matching Indices. **Multivariate Behavioral Research, 26** (2), 323-343.

Harter, S. (1985). **The Self-Perception Profile for Children**. Denver: University of Denver.

Hotelling, H. (1933). Analysis of a complex of statistical variables into principal components. **Journal of Educational Psychology, 24**, 417-441, 498-520.

Hotelling, H. (1936). Simplified calculation of principal components. **Psychometrika, 1**, 27-35.

Jöreskog, K.G. y Sörbom, D. (1979). **Advances in Factor Analysis and Structural Equation Models**. Massachusetts : Abt Books.

Kaiser, H.F., Hunka, S. & Bianchini, J.C. (1971). Relating factor studies based upon different individuals. **Multivariate Behavioral Research, 6**, 409-422.

Kiers, H.A.L. (1990). **SCA. A program for simoultaneous components analysis of variables measured in two or more populations**. Groningen: iec *Pro*GAMMA.

Kiers, H.A.L. y Ten Berge, J.M.F. (1989). Alternating least squares algorithms for simoultaneous components analysis with equal weight matrices in two or more populations. **Psichometrika, 54**, 467-473.

Kiers, H.A.L. & Ten Berge, J.M.F. (1992). Minimization of a class of matrix trace functions by means of refined majorization. **Psychometrika, 57**, 371-382.

Kiers, H.A.L. & Ten Berge, J.M.F. (1994). Hierarchical relations between methods for Simultaneous Components Analysis and a technique for rotation to a simple simultaneous structure. **British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 47**, 109-126.

Klecka, W.R. (1982). **Discriminant Analysis**. Londres : Sage.

Landis, J .R. y Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. **Biometrics, 33**, 159-174.

Levin, J. (1966). Simultaneous factor analysis of several gramian matrices. **Psychometrika,**

57, 123-134.

Mardia, K.V., Kent, J.T. & Bibby, J.M. (1979). **Multivariate analysis**. London: Academic Press.

McArdle y Cattell (1994). **Structural Equation Models of factorial invariance in parallel proportion profiles and oblique confactor problems**.

Meredith , W. (1993). Measurement invariance, factor analysis, analysis and factorial invariance. **Psichometrika, 58**(4), 525-543.

Millsap, R. E. y Meredith, W. (1988). Component Analysis in Cross-sectional and Longitudinal Data. **Psychometrika, 53**, 123-134.

Mulaik, S.A. (1972). **The foundations of factor analysis**. New York : McGraw-Hill.

Nunnally, J. C. (1987). **Teoría Psicométrica** (1ª ed.) Méjico: Trillas

Paunonen, S.V. (1997). On chance and factor congruence following orthogonal Procustes rotation. **Educational and Psychological Measurement., 57**(1), 33-59.

Pearson, K. (1901). On lines and planes of closets fit to systems of points in the space. **Philosophical Magazine, 2**, 559-572.

Ten Berge, J.M.F. (1986a). Some relations between descriptive Comparisons of Components from different studies. **Multivariate Behavioral Research, 21**, 29-40.

Ten Berge, J.M.F. (1986b). Rotation to perfect congruence and the cross-validation of component weights across populations. **Multivariate Behavioral Research, 21**, 41-64.

Ten Berge, J.M.F. (1996). The Kaiser, Hunka and Bianchini Factor Similarity Coefficients : A Caustionary Note. **Multivariate Behavioral Research, 31**(1) , 1-6.

Ten Berge, J.M.F. y Kiers, H.A.L. (1996). Optimality criteria for principal component analysis and generalizations. **British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 49**, 335-345.

Tucker, L. R. (1951). **A method for synthesis of factor analysis studies.** Personnel Research Section Report No.984. Washington, DC: Department of the Army.

Velicer, W. F., Peacok, A. C. y Jackson, D. N. (1982). A comparison of component and factor patterns : A monte carlo approach. **Multivariate Behavioral Research, 17**, 371-388.

Wrigley, C. S. y Neuhaus, J.O. (1955). The matching of two sets of factors. **American Psichologist, 10**, 418-419.

Apéndice 1.

Coeficiente de Congruencia C (Burt, 1948; Tucker, 1951; Wrigley y Neuhaus, 1955).

Es una medida de la similaridad entre las saturaciones de cada factor en dos grupos. Ambos vectores de saturaciones se obtienen de la matriz factorial en los dos grupos. Se obtiene

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{p} l_{1i} l_{2i}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{p} l_{1i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{p} l_{2i}^2\right)}}$$

siendo l_{1i}, l_{2i} $i:1,\ldots,p$ las saturaciones de los dos factores o componentes que se van a comparar.

El rango de valores de C varía entre -1 y 1, indicando el valor cero falta de acuerdo. Cureton y D'Agostino (1983) y Mulaik (1972) sugieren valores de C mayores que 0,90 ó 0,80 para afirmar que dos factores son congruentes.

Coeficiente de Correlación de Pearson

La correlación de Pearson entre las saturaciones de dos componentes, l_{1i} y l_{2i} $i:1,\ldots,p$, viene dada por la expresión:

$$r_{l_1 l_2} = \frac{n\sum_{i=1}^{p} l_{1i} l_{2i} - \sum_{i=1}^{p} l_{1i} \sum_{i=1}^{p} l_{2i}}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{p} l_{1i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{p} l_{1i}\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{p} l_{2i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{p} l_{2i}\right)^2}}$$

Cliff (1966) propone una correlación mínima 0,75 para que los factores tengan una interpretación similar.

Estadístico S

Este índice muestra la similaridad entre dos factores en función de las saturaciones altas positivas, altas negativas y bajas saturaciones (Cattell, 1949; Cattell y Baggaley, 1960; Cattell, Balcar, Horn y Nesslroade, 1969), y se obtiene:

$$s = \frac{f_{11} + f_{33} - f_{13} - f_{31}}{f_{11} + f_{33} + f_{13} + f_{31} + 1/2\left(f_{12} + f_{21} + f_{23} + f_{32}\right)}$$

f_{ij} representa la frecuencia conjunta de saturaciones altas positivas (i,j=1), saturaciones altas negativas (i,j=2) y variables con baja saturación (i,j=3) de los vectores de saturaciones correspondientes en los dos grupos.

El rango de valores de S se encuentra entre 1 (perfecta coincidencia) y -1 (perfecto desacuerdo), representando el valor 0 acuerdo por azar entre los dos factores.

No existe acuerdo acerca de cuál es el punto de corte requerido para indicar la magnitud de una saturación, el valor elegido es arbitrario y subjetivo (Guadagnoli y Velicer, 1991). El valor sugerido por Cattell (1978) ± 0'1 se considera muy bajo. Velicer, Peacok y Jackson (1982) proponen un valor de S entre ± 0'3 y ± 0'4 para indicar el grado de la similaridad entre factores.

Tests de significación acerca del valor de S se han cuestionado.

Coeficiente Kappa de Cohen

Guadagnoli y Velicer (1991, p. 327) proponen utilizar el coeficiente kappa de Cohen (1960) para comparar las saturaciones altas y bajas en dos factores de diferentes soluciones. Para ello se debe establecer un punto de corte. Para ello se utilizan items con saturaciones bajas, entre -0,3 y 0,3, (SB) e items con saturaciones altas, menores que -0,3 o mayores que 0,3, (SA). A partir de esta clasificación, se contruye la siguiente tabla:

	SA	***SB***	**Total fila**
SA	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
SB	n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$
Total Columna	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{..}$

y Kappa se obtiene:

$$\kappa = \frac{P_0 - P_C}{1 - P_C}$$

siendo $P_0 = p_{11} + p_{22}$ y $P_C = \sum p_i . p._i$, el rango para los valores es $\frac{-P_C}{1-P_C} \leq \kappa \leq 1$

Cuando las marginales son simétricas y fijadas, existe acuerdo completo si $P_0 = 1$ y $\kappa = 1$. Si las clasificaciones son independientes, entonces $\kappa = 0$. Si κ es negativo existe menos acuerdo del que se esperaría por azar. Landis y Koch (1977) establecen una guía para interpretar este índice, así valores de κ mayores que 0’75 representan un alto grado de similaridad entre factores, entre 0’40 y 0’75 grado de similaridad moderado y por debajo de 0’40 pobre.

Apéndice 2.

Características de PCA de Pearson y de los procedimientos SCA (SCA-S, SCA-W y SCA-P)

Pearson (1901) trata de encontrar la matriz **F** (*n* x *r)* , *r<p*, que mejor resume la información de la matriz original de datos **Z,** en el sentido de la regresión múltiple, que minimiza la expresión

$$\sigma(\mathbf{F},\mathbf{P}) = \left\| \mathbf{Z} - \mathbf{FP'} \right\|^2 \qquad (1)$$

siendo $\mathbf{P} = \mathbf{K}_r \Lambda_r^{1/2} (\mathbf{T'})^{-1}$ (*p* x *r) la matriz patrón* que contiene los pesos de las variables en las regresiones sobre los *r* componentes (**F**); **T** (rxr) una matriz de transformación no singular, **y** $\mathbf{K}_r$ **,** (kxr) que contiene las *r* primeras columnas de **K,** siendo **K** los autovectores de la descomposición $\mathbf{R} = \mathbf{K\Lambda K'}$; y $\Lambda_r^{1/2}$ que contiene los *r* autovalores mayores de $\Lambda^{1/2}$.

El problema de minimización (1) se transforma en minimizar (2) sobre las matrices **W** y **P**

$$\sigma(\mathbf{W},\mathbf{P}) = \left\| \mathbf{Z} - \mathbf{ZWP'} \right\|^2 . \qquad (2)$$

siendo **W** (*p*x*r*) la *matriz de los pesos de las variables en los componentes*, que se utiliza para calcular las puntuaciones en los *r* componentes a partir de **F=ZW .**

la minimización de σ en (2) se reduce a minimizar $f(\mathbf{W}) = \left\| \mathbf{Z} \right\|^2 - tr\mathbf{W'R}^2\mathbf{W}(\mathbf{W'RW})^{-1}$ (3)

El porcentaje de varianza explicada (VAF) por la solución viene dado por Kiers (1990) como

$$\mathrm{VAF} = \left[tr\mathrm{W'R}^2\mathrm{W}(\mathrm{W'RW})^{-1} / tr\mathrm{R} \right] 100\% \qquad (4)$$

Generalmente se obtienen los componentes estandarizados, entonces la matriz de estructura **S** contiene las correlaciones entre las variables y los componentes, $\mathbf{S} = \mathbf{Z'}\,\mathbf{ZW} = \mathbf{RW}$.

SCA

Dadas *p* variables medidas en *k* grupos diferentes $(k \geq 2)$, se tienen *k* matrices de puntuaciones estandarizadas $\mathbf{Z_i}$ (n x p) i:1,....,k y las matrices de correlación asociadas, $\mathbf{R}_i\ i:1,\ldots,k$. Se construye **Z*,** $\left(\sum n_i\right) xp$, matriz de columnas estandarizadas y la matriz de correlación $\mathbf{R}^* = \mathbf{Z}^{*\prime}\mathbf{Z}^* / n$, siendo $\sum n_i = n$. La generalización del método PCA de Pearson a *k* grupos se centra en la optimización de (2) , y se puede expresar

$$\sigma^*(\mathbf{W_1,\ldots,W_p\ P_1,\ldots,P_p}) = \sum_{i=1}^{k}\left\|\mathbf{Z}_i - \mathbf{F}_i\mathbf{P}'_i\right\| = \sum_{i=1}^{k}\left\|\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_i\mathbf{W}_i\mathbf{P}'_i\right\|^2 \qquad (5)\ .$$

Considerando (5) e imponiendo restricciones a $\mathbf{W_i}$ y $\mathbf{P_i}$ se obtienen los componentes comunes en los *k* grupos. Ello se puede obtener de diferentes formas dependiendo de la información que se fije entre grupos, dando lugar a los siguientes métodos:

SCA-W minimiza (5) sujeto a la restricción de que las matrices $\mathbf{W_i}$ tengan columnas proporcionales entre grupos. Generalmente con este método las matrices de estructura $\mathbf{S_i} = \mathbf{R_i}\mathbf{W_i}\ i:1,\ldots,k$ no tienen columnas proporcionales (Millsap y Meredith, 1988).

Un caso particular se tiene cuando los pesos de los componentes son constantes, es decir $\mathbf{W_1,\ldots,W_k} = \mathbf{W}$. Entonces minimizar (5) se transforma en minimizar la función (6):

$$\sigma^*(\mathbf{W},\mathbf{P}_i) = \sum_{i=1}^{k}\left\|\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_i\mathbf{W}\mathbf{P}'_i\right\|^2 w_i \qquad (6)$$

siendo $\mathbf{Z}_i$ la matriz de puntuaciones estandarizadas del grupo *i*, $\mathbf{P}_i$ la matriz patrón en el grupo *i*, w_i el peso para el grupo *i* , generalmente $w_i = 1$, y, por último, **W** la matriz de pesos que se requiere que sea igual en todos los grupos. Minimizar (6), teniendo en cuenta (3), equivale a maximizar

$$\mathrm{f}\,(\mathbf{W}) = \sum_{i=1}^{k} w_i\, tr\, \mathbf{W}'\mathbf{R}_i^2\mathbf{W}\left(\mathbf{W}'\mathbf{R}_i\mathbf{W}\right)^{-1} \qquad (7)$$

Por tanto, SCA-W maximiza la suma de la varianza explicada por los componentes y obtiene la solución ajustando sucesivamente las columnas de **W** y las matrices $\mathbf{P}_i$, hasta que se obtiene un incremento menor que un valor predeterminado en la función (7).

SCA-S minimiza (5) sujeto a la restricción de que las columnas de las matrices de estructura sean congruentes entre grupos, lo que lleva a que las matrices de pesos no tienen columnas proporcionales. Siendo $\mathbf{S_i} = \mathbf{R_i}\mathbf{W_i}\ i:1,\ldots,l$, bajo esta restricción $\mathbf{S_i} = \mathbf{S}\mathbf{D_i}$ para alguna matriz diagonal $\mathbf{D}_i$ y $\mathbf{S}$ la *matriz de estructura común de los componentes.* Por tanto, SCA-S minimiza (5) sujeto a la restricción $\mathbf{SD}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{W}_i$ $i{:}1,..,k$ (8).

Kiers y ten Berge (1992, 1994) describen procedimientos para minimizar esta función, similares a los propuestos por Kiers y ten Berge (1989) para SCA-W.

SCA-P es el método que proporciona análisis de componentes independientes bajo la restricción de que las matrices patrón sean iguales o lo que es equivalente, de que las columnas sean proporcionales entre grupos. SCA-P minimiza (5) en las matrices $\mathbf{W}_1 ... \mathbf{W}_k$, sujeto a la restricción de que las matrices patrón sean constantes, esto es, $\mathbf{P_1 = ... = P_k = P}$. Por tanto, se trata de minimizar (9)

$$\sigma(\mathbf{W_1 ... W_k, P}) = \sum_{i=1}^{k} \left\| \mathbf{Z_i} - \mathbf{Z_i W_i P'} \right\|^2 \qquad (9)$$

Kiers y ten Berge (1994) transforman el problema de minimización (9) en uno equivalente basado en el método de Levin (1966) que minimiza (10) sobre las matrices **P**.

$$\sigma(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{k} \left\| \mathbf{R_i} - \mathbf{PP'} \right\|^2 \qquad (10)$$

y obtienen la solución para matrices de pesos iguales, es decir, $\mathbf{W_1} = ... = \mathbf{W}_k = \mathbf{W} = \mathbf{P(P'P)}^{-1}$

Por tanto, SCA-P proporciona matrices **P** y **W** invariantes en la solución. Es decir, SCA-P es un caso particular de SCA-W con la restricción de que las matrices patrón $\mathbf{P}_i$ sean iguales.

Apéndice 3.

Matrices de correlaciones entre los items en cada grupo

GRUPO P-P

1.0000																				
-.1036	1.0000																			
.1033	.2149	1.0000																		
.1382	.1380	.2721	1.0000																	
.2466	-.0146	.1245	.2214	1.0000																
-.0646	.4909	.1164	.2670	.0497	1.0000															
.0797	.3386	.6430	.2659	.0453	.1719	1.0000														
.1752	-.0432	.2028	.4586	.2636	.0338	.2295	1.0000													
.4513	.0554	.1083	.3092	.3478	.0114	.1536	.2691	1.0000												
.4405	.0822	.2824	.3637	.2308	.2382	.2487	.1957	.3626	1.0000											
.1479	.3384	.1387	.1257	.0254	.3487	.2284	.0353	.0642	.3031	1.0000										
.1710	.1272	.2088	.5356	.1982	.1550	.2143	.6570	.2918	.2173	.1195	1.0000									
.0176	.2229	.4642	.1630	.0761	.0884	.3920	.0813	.0472	.1868	.1261	.1154	1.0000								
.0577	.1307	.2990	.5273	.1545	.1861	.2009	.5103	.0640	.2611	.1061	.6494	.1503	1.0000							
.5509	.0163	.1437	.2781	.3922	.0686	.2063	.1608	.4651	.4378	.1329	.1771	.0389	.0625	1.0000						
.1738	.1283	.1101	.5077	.1590	.1771	.1497	.2897	.3215	.3072	.0960	.4941	.0995	.4800	.1697	1.0000					
.4391	-.0051	.1614	.1507	.2498	.0202	.1588	.1377	.2966	.3614	.2553	.1859	.1779	.0391	.3965	.1331	1.0000				
.0175	.2215	.1972	.0686	.0399	.2243	.1693	.0459	.0171	.0986	.3212	.1633	.2886	.0827	.0622	.0770	.2055	1.0000			
.1203	.0853	.1909	.3867	.1846	.1857	.2263	.1601	.1711	.2966	.2147	.3541	.2896	.3069	.1798	.4955	.2951	.2118	1.0000		
.4705	-.0456	.1560	.2242	.5058	-.0128	.1849	.1669	.5161	.3131	.0740	.1437	.0414	.1113	.5332	.2635	.3320	.0787	.1983	1.0000	
.3041	.0857	.2417	.3053	.3633	.1047	.2475	.2505	.4519	.3489	.2051	.3095	.1602	.2588	.4469	.3219	.3703	.1258	.3241	.4979	1.0000

GRUPO P-E

1.0000																				
.0198	1.0000																			
-.0432	.3172	1.0000																		
.0411	.3066	.2491	1.0000																	
.3556	.1042	.1239	.1155	1.0000																
.1764	.3721	.1023	.2236	.0626	1.0000															
.0463	.2414	.6292	.2364	.1665	.1788	1.0000														
.0104	.2370	.2892	.4924	.1278	.2087	.2023	1.0000													
.4406	.0037	.0650	.1483	.3058	-.1430	.0335	.2413	1.0000												
.3095	.0235	-.0894	-.0374	.1696	.2395	-.0467	.1507	.0568	1.0000											
.1009	.3186	.2708	.1249	-.0694	.2918	.2755	.1729	.1741	.1568	1.0000										
.0921	.2759	.2799	.7007	.3227	.2224	.2836	.6201	.2284	.1350	.1467	1.0000									
.1008	.2141	.1564	.1194	.0543	.2073	.3359	.1126	-.1612	-.0105	.1818	.0538	1.0000								
-.0052	.1888	.3076	.6321	.1857	.2403	.3064	.5782	.0823	.1103	.1027	.7781	.1142	1.0000							
.7334	.0512	.0921	.1007	.3703	.0240	.1041	-.0374	.4336	.3246	.0354	.1241	-.0441	.0527	1.0000						
.1087	.0302	.1733	.5674	.1822	.1358	.1907	.3106	.1125	-.0187	-.0684	.5675	.1046	.5217	.2110	1.0000					
.4645	-.0713	.0365	-.1115	.1582	.0520	.0824	.0280	.2713	.2527	.0826	-.0848	.2103	.0223	.4193	.0336	1.0000				
.0437	.1955	.0948	.1629	-.0374	.1601	.1353	.2438	-.0384	.1353	.2863	.2114	.3289	.2003	.0164	.0074	.1796	1.0000			
-.0259	.0596	.1032	.5478	-.0026	.1924	.0617	.4120	.1546	.0377	-.0165	.5194	.1030	.5232	-.0068	.5979	-.0809	.1484	1.0000		
.3936	-.0634	.0763	-.0067	.5318	.0209	.1286	.1002	.3148	.1511	.0179	.1475	-.1295	.1120	.4832	.1225	.2246	-.1674	.0421	1.0000	
.3687	.0162	.1299	-.0230	.6184	.0371	.1529	.1228	.3832	.3189	-.0126	.2177	-.0427	.1502	.4508	.0894	.3065	-.0388	.0631	.4825	1.0000

GRUPO E-E

1.0000																				
.1194	1.0000																			
.0994	.3876	1.0000																		
.1264	.2501	.2971	1.0000																	
.3687	.1927	.1168	.3594	1.0000																
.0279	.3746	.2685	.1315	.0633	1.0000															
.0825	.2965	.7226	.3121	.0714	.2803	1.0000														
.1568	.2056	.3002	.4924	.1856	.1418	.3149	1.0000													
.4043	.1971	.1506	.1696	.3913	.1366	.1617	.2022	1.0000												
.3438	.2556	.2171	.1995	.2283	.1461	.1582	.1547	.3095	1.0000											
.0918	.4612	.2741	.2843	.2101	.4552	.2662	.2823	.2304	.2388	1.0000										
.2022	.2633	.3335	.6746	.2980	.1295	.3066	.7729	.2263	.2682	.2687	1.0000									
-.0260	.1056	.3409	.1677	.0429	.1202	.3177	.2358	-.0288	.0678	.1045	.23383	1.0000								
.2157	.2461	.2919	.6560	.3071	.0715	.2812	.6079	.2237	.2784	.2321	.78844	.2007	1.0000							
.6301	.0312	.0306	.1401	.4310	.0261	.0544	.1094	.4524	.3503	.0737	.12866	-.0463	.1469	1.0000						
.1949	.1565	.2069	.5621	.2669	.0809	.2317	.3647	.1115	.2000	.1851	.46528	.1255	.5391	.1367	1.0000					
.3915	-.0169	.0313	.0092	.1851	.0427	.0493	.1164	.3422	.2731	.0902	.05423	.0192	.0330	.4988	.1159	1.0000				
.0234	.2604	.1958	.1574	.0248	.1923	.1831	.1290	-.0236	.0880	.1807	.14333	.3008	.1376	-.0564	.1612	.0323	1.0000			
.1022	.1631	.1873	.4526	.1707	.1063	.2278	.3312	.0936	.2154	.1825	.46182	.2834	.4596	.1027	.5606	.0831	.2364	1.0000		
.4190	.0216	.0955	.1962	.4802	-.0235	.1338	.1571	.5118	.2185	.1333	.22882	-.0221	.2465	.4649	.1464	.3585	-.0773	.1440	1.0000	
.3886	.1243	.1694	.2214	.4542	.1019	.1848	.1735	.5400	.2638	.1855	.2064	-.0221	.2092	.4500	.2204	.3895	-.0058	.1781	.5440	1.0000