



Revista Electrónica de Metodología Aplicada  
1999, Vol. 4 nº 2, pp. 31-62

---

## **AJUSTE DEL MODELO DE MOKKEN CON EL PROGRAMA MSP 4.0: UNA APLICACION CON ITEMS DE RAZONAMIENTO INDUCTIVO NUMERICO.**

**Teresa Rivas Moya**  
**Facultad de Psicología**  
**Universidad de Málaga**  
**e-mail: moya@uma.es**

### **ABSTRACT.**

From relatively weak assumptions, the Nonparametric monotone IRT of Mokken gives an order to the subjects and/or items. The parameters and Functions of Items Response for dichotomous items satisfying Monotone Homogeneity (MH ó HM) and Double Monotony (DM) are defined. The necessary assumptions which must satisfy a set of monotonely homogeneous (MH) or doubly monotone (DM) items, methods for the evaluation of goodness of fit of these models, and procedures to obtain reliability of a set of DM items are given. The model is fitted with the program 'Mokken Scale Analysis for Polytomous Ítems' (MSP 4.0) of Molenaar, Debets, Sijtsma y Hemker (1994). An application is also made from the answers given by a sample of 400 subjects to 12 dichotomous items of numerical inductive reasoning. The goodness of fit of DM model is proved. It is also shown that this set of items is a scale, and the order in which the set of items must be presented is also given. The set of items is invariant in subgroups of subjects, whose mean ages and standard deviations are similar. The subgroups are defined by several sociocultural levels in State, private, urban and rural schools. In addition, this accumulative scale is reliable.

**Key words:** Nonparametric monotone IRT, Mokken's Model, Homogeneity Monotone, Double Monotonicity, Reliability.

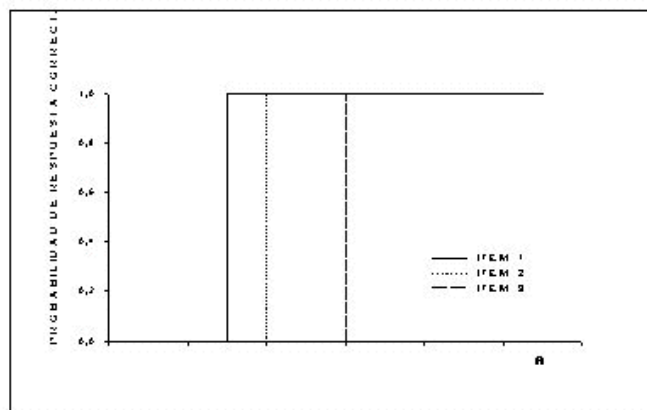
*Agradecimientos:* La autora desea agradecer a Alfonso Ortiz su autorización para emplear los datos que ilustran la aplicación del modelo presentado en este trabajo.

## 1. Introducción.

Gran parte de los datos utilizados en Psicología son repuestas a ítems dicotómicos. Una clase especial de este tipo de ítems son los que forman una escala acumulada. Una de las aproximaciones para analizar la estructura que subyace a este tipo de ítems es denominada por Torgerson (1958) "Escalamiento basado en la respuesta". Esta aproximación trata conjuntamente sujetos e ítems y obtiene una escala en la que se ordenan ambos. Bajo esta aproximación, Guttman (1950) propone el modelo determinista de escala perfecta, a partir de ítems que definen puntos de corte en un continuo. Los ítems de una escala perfecta Guttman sólo tienen probabilidad de respuesta correcta 0 ó 1. Es decir,

$$P_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta_i \\ 1 & \text{si } x \geq \theta_i \end{cases}$$

Cualquier ítem de esta escala se caracteriza por tener curvas características como las dadas en la Figura 1.



**Figura 1.** Representación gráfica de ítems Guttman perfectos.

No es usual encontrar escalas Guttman perfectas en la práctica. Por ello, Mokken (1971, 1997) presenta un modelo probabilístico de dos parámetros (q,d) que permite analizar el grado de acumulatividad de los ítems de una escala. Este modelo pertenece a la familia de los modelos de la Teoría de la Respuesta a los Ítems No paramétrica (TRIN), y trata la aptitud o actitud como un atributo latente sobre el que se puede representar la posición del sujeto, mediante un parámetro q, y la posición de un ítem por medio del parámetro d.

En este modelo se definen dos tipos de Curvas Características del Ítem (CCI), las que corresponden a ítems que verifican la Monotonía Simple u Homogeneidad Monótona (HM), y las que corresponden a ítems Holomorfos o que satisfacen la Doble Monotonía (DM). El modelo de HM permite ordenar a los sujetos en la escala del atributo latente, y es menos

restrictivo que el modelo de la DM, que requiere, además, que las CCI no presenten intersección y permite ordenar también los ítems. Ambos son menos restrictivos que el modelo paramétrico de Rasch.

En el siguiente apartado se presentan los conceptos básicos necesarios - parámetros y tipo de funciones - que caracterizan a ítems HM y DM. A continuación se describen las condiciones o supuestos necesarios para que los ítems se ajusten al modelo de HM ó DM.

El estudio de la HM se basa en los coeficientes de acumulatividad de pares de ítems, de cada ítem y del conjunto de ítems. La DM se estudia analizando las matrices que contienen las proporciones de respuestas positivas y negativas a pares de ítems. En Mokken (1971, 1997) y Martínez y Rivas (1990) se hace una exposición detallada de los coeficientes anteriores, y en Rivas y Martínez (1992) y Rivas, Martínez e Hidalgo (1996) se presentan programas en PASCAL y en FORTRAN 77, respectivamente, para su obtención. Aquí se expone un resumen de la expresión de los coeficientes de acumulatividad y de la fiabilidad del conjunto de ítems (Ver Apéndice 1).

Posteriormente al trabajo de Meijer, Sijtsma y Smid (1990), Molenaar (1982, 1983, 1986) - citados en Molenaar, Debets, Sijtsma & Hemker (1994) - Sijtsma y Meijer (1992) han desarrollado nuevos procedimientos para evaluar empíricamente si un conjunto de ítems satisface la HM y la DM, que se describen en el apartado 4. Sijtsma (1998) revisa los supuestos, los métodos de ajuste modelo - datos, fiabilidad, y procedimientos de selección de ítems dicotómicos en TRIN. Los procedimientos para obtener la precisión de la medida propuestos por Mokken (1971), Molenaar y Sijtsma (1984) y Sijtsma y Molenaar (1987) se describen en el apartado 4 y las expresiones de los coeficientes de fiabilidad se muestran en el Apéndice 1.

Se presenta además una aplicación al estudio de la acumulatividad de 12 ítems, con formato de respuesta dicotómica, que tratan de medir razonamiento inductivo numérico cuya definición y respuestas están dadas en Ortiz (1997). El ajuste del modelo se ha realizado con el programa 'Mokken Scale Analysis for Polytomous Items' (MSP 4.0) de Molenaar et al. (1994). Este programa supone un gran avance para el ajuste del modelo a partir de respuestas a ítems dicotómicos o politómicos. Se prueba que el conjunto de ítems satisface las condiciones del modelo de la Doble Monotonía, formando una escala en la que el orden de algunos ítems cambia con respecto al orden a priori establecido por el investigador. Se muestra además que la escala y el orden de los ítems es invariante en tres subgrupos, homogéneos en función de la edad, definidos por el tipo de enseñanza pública-privada y la procedencia rural-urbana.

Los resultados se presentan sólo para la muestra de sujetos, dado que la distribución de las puntuaciones en la escala es sesgada y no se puede suponer que las puntuaciones se distribuyan según la Normal, requisito necesario en el contraste de hipótesis acerca de los coeficientes de acumulatividad.

## 2.- Modelos CCI de Mokken: conceptos básicos.

Sea una población de  $N$  sujetos que responden a  $n$  ítems con formato de respuesta dicotómica.  $q$  denota el parámetro aptitud o actitud de cualquier sujeto de la población y representa el valor de la medida de un sujeto en la escala latente.

Dada la definición no paramétrica del parámetro  $q$  del sujeto,  $q$  no se puede estimar numéricamente. Sin embargo,  $q$  tiene el mismo orden que la puntuación verdadera en el Modelo Clásico de los Tests. Además, Grayson (1988) prueba que los distintos valores de  $q$  se pueden ordenar con las puntuaciones empíricas  $X$ , que se definen como el número de respuestas positivas. Por tanto, en la práctica, el orden de las puntuaciones observadas estima el orden de los sujetos en la escala  $q$ .

$d_i$  denota el parámetro del ítem o dificultad del ítem, y se define como la proporción de sujetos que da una respuesta positiva al ítem,  $p_i = N_i / N$ , siendo  $N_i$  el número de sujetos de la población que da una respuesta positiva al ítem  $i$ .

Dados dos ítems cualesquiera  $i, j$ , se pueden ordenar según el orden que induce su dificultad. Si " $i < j$ " denota que el ítem  $i$  es más difícil que el ítem  $j$ , entonces

$$i < j \Leftrightarrow d_i > d_j \Leftrightarrow p_i < p_j \quad i, j: 1, \dots, n \quad (1)$$

La función que describe la relación entre el valor de la escala latente  $q$  y la probabilidad de una respuesta positiva  $p$  al ítem en ese valor es la Curva Característica del Ítem (CCI) o la Función de respuesta al ítem (FRI). La CCI de un Ítem Monótono define un punto de corte que divide el continuo de actitud en dos intervalos: La actitud requerida para dar una respuesta positiva a un ítem y la actitud que se requiere para dar una respuesta negativa a un ítem (Gifi, 1990). En el contexto de la TRI, el modelo de Mokken es no paramétrico porque las CCI no siguen una función predeterminada y porque no existe supuesto alguno acerca de la distribución de la aptitud o actitud  $q$ .

En función de las restricciones que debe verificar un conjunto de ítems para formar una escala de Mokken se consideran dos modelos: el modelo de CCI de HM y el modelo de CCI de DM. Bajo el primer modelo se debe verificar la unidimensionalidad, independencia local y monotonía en el atributo latente. El segundo modelo, además de estas condiciones, debe verificar la monotonía con respecto a las dificultades de los ítems.

La HM sólo requiere que las funciones de respuesta a los ítems sean monótonas no decrecientes. Un supuesto adicional más restrictivo es que estas funciones no presenten intersección. En la práctica, sólo subconjuntos de ítems que satisfacen las condiciones del modelo HM, verifican las condiciones del modelo DM. En este último caso, se pueden ordenar los sujetos independientemente de los ítems y los ítems independientemente de los sujetos. La Figura 2 muestra que el conjunto formado por los 4 ítems es MH, los ítems 1 y 2 son DM y

los items 3 y 4 no lo son.

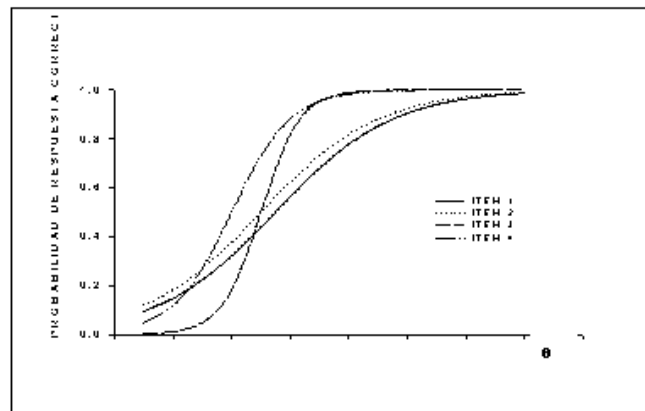


Figura 2. Representación gráfica de ítems monótonos

En el siguiente apartado se describen las condiciones que debe verificar un conjunto de ítems para que formen una escala acumulada. De ellas, el programa MSP 4.0 permite analizar las condiciones 2.1.3 y 2.1.4. La unidimensionalidad se debe probar antes de estudiar la HM y la DM.

## 2.1.- Supuestos que debe satisfacer un conjunto de ítems bajo el modelo de Mokken.

Un conjunto de ítems es una escala de Mokken si satisface las siguientes condiciones:

2.1.1. Unidimensionalidad: los ítems de una escala de Mokken proporcionan una medida unidimensional. Esto es, las respuestas a los ítems de una escala explican un único atributo  $q$ .

2.1.2. Independencia local de las puntuaciones a los ítems: dado un valor  $q$  las puntuaciones sobre un conjunto de ítems son independientes. Esto implica que las respuestas de un sujeto a cualquier ítem no están influidas por las respuestas a los ítems previos, ni afectarán a las respuestas de los que le siguen.

2.1.3. Monotonía de los ítems con respecto al atributo latente  $q$ : La probabilidad de una respuesta positiva a un ítem es una función monótona no decreciente del valor del atributo latente  $q$ . Es decir, la probabilidad de una respuesta positiva a un ítem  $i$ ,  $p_i(q)$ , aumenta cuando crece el valor de  $q$ . Un ítem  $i$  es monótono si dados dos sujetos  $a$  y  $b$  tales que

$$\theta_a \leq \theta_b \Leftrightarrow \pi_i(\theta_a) \leq \pi_i(\theta_b) \quad (2)$$

Para que se verifique el supuesto 3, (2) debe ser cierto en cada  $\theta_i, \theta_j, a, b : 1, \dots, N$ ;  $a \neq b$  y para todo ítem  $i: 1, \dots, n$ .

Para Ellis y Wollenberg (1993, pp. 417-418) un conjunto de ítems que verifica los tres supuestos es monótono, si además satisface la homogeneidad local (HL) verifica la HM. Estos autores muestran que la HL equivale a la invarianza del modelo en toda subpoblación de la población de interés, es decir, que el modelo es adecuado para el mismo rasgo latente y las mismas funciones de respuesta a los ítems en toda subpoblación.

Un conjunto de ítems que satisface los tres supuestos verifica la HM, y los sujetos que responden a estos ítems se pueden ordenar en función del atributo latente. El orden esperado de los sujetos en una escala latente es el mismo para cualquier subconjunto de un conjunto de ítems MH. En este sentido, el orden de los sujetos establecido a partir de ítems con CCI no decrecientes es independiente de los ítems (Molenaar et al. 1994, p.4).

Un modelo más restrictivo que el anterior, se obtiene añadiendo a los tres supuestos anteriores el supuesto de monotonía de las dificultades de los ítems. Los cuatro supuestos implican que las CCI no presentan intersección, pero pueden coincidir completamente o en un punto. Esta condición se puede expresar como sigue:

2.1.4. Dados dos ítems  $i, j$  con nivel de dificultad  $d_i > d_j$ , no presentan intersección  $\Leftrightarrow P(\theta_i, d_i) \leq P(\theta_i, d_j)$  para todo sujeto con nivel de actitud  $\theta_i$  (3).

Un conjunto de ítems que satisface los cuatro supuestos es DM. El orden de un conjunto de ítems con CCI que no presentan intersección debe ser el mismo en cada subpoblación de sujetos, extraída de la población de interés. En este sentido el orden de los ítems es independiente de los sujetos (Molenaar et al. 1994, p.5).

La HM permite ordenar a los sujetos en función de  $q$ , y la DM, además, proporciona un orden de los ítems en la escala latente en función del parámetro dificultad  $q$ .

El modelo de Mokken impone a un conjunto de ítems la restricción Doble monotonía u Holomorfismo para que estos formen una escala acumulada (Mokken, 1971; Mokken y Lewis 1982). Rasch (1960; p. 169) denominó a las CCI que satisfacen las cuatro restricciones anteriores Curvas Holomorfas .

### 3.- Bondad de ajuste de los modelos MH y DM.

En los apartados 3.1. y 3.2. se muestran las condiciones que permiten analizar, en la práctica, si un conjunto de ítems es MH y DM.

#### 3.1. Bondad del ajuste del modelo de Homogeneidad Monótona

3.1.1. Estudio de los índices de escalabilidad o acumulatividad  $H_{ij}$ ,  $H_i$  y  $H$ . Las expresiones de estos índices están dadas en el Apéndice 1.

Mokken (1971, p.150) prueba que  $n$  ítems tienen CCI no decrecientes si  $0 \leq H \leq 1$ , siendo  $H = 0$  si y sólo si al menos  $n-1$  CCI son funciones constantes en  $\theta$ .

Las condiciones necesarias que deben verificar las CCI para que sean no decrecientes, son que los coeficientes de acumulatividad  $H_{ij}$  y  $H_i$  asuman valores no negativos, es decir:

a.- Las covarianzas entre todos los pares de ítems son positivas. Ello implica que para todos los pares de ítems  $H_{ij} > 0$ .

b.- El coeficiente de escalabilidad de cada ítem  $H_i$  es un valor positivo  $c$ , es decir,  $H_i \geq c > 0 \forall i$ .

c.- De esta segunda condición Mokken (1971, p.153) concluye que  $H \geq c$ .

Este autor recomienda utilizar la cota inferior  $c = 0,3$  para que un conjunto de ítems sea MH, y establece las siguientes cotas, extraídas de la práctica, que permiten clasificar las escalas según el grado de acumulatividad en:

$$0,30 \leq H < 0,40 \text{ Escala débil}$$

$$0,40 \leq H < 0,50 \text{ Escala media}$$

$$0,50 \leq H \leq 1 \text{ Escala fuerte}$$

Además, un conjunto de ítems con  $H < 0,3$  no es una escala HM.

Mokken, Lewis y Sijtsma (1986) sugieren que cuanto mayor es el valor de  $H$  con más confianza se pueden ordenar los sujetos en la escala latente, a partir de sus respuestas a  $n$  ítems.

3.1.2. Molenaar et al. (1994, p.8), basándose en estos índices, proponen un procedimiento paso a paso para seleccionar ítems HM a partir de un conjunto de  $n$  ítems. Inicialmente se parte del par de ítems con el valor  $H_{ij}$  más alto, aunque opcionalmente se puede hacer otra selección. En cada etapa se añade un ítem a los  $k$  ya seleccionados de forma que, el coeficiente  $H$  de los  $k+1$  ítems seleccionados, sea el mayor entre los posibles  $H$  que se hubiesen podido obtener, seleccionando cualquiera de los  $n-k$  ítems restantes. El proceso de selección continúa hasta que se satisfacen los criterios para que el conjunto de ítems sea MH.

3.1.3. Molenaar (1982, 1983) propone otro procedimiento para evaluar la HM, basado en el análisis de la proporción de respuestas correctas en los grupos de puntuaciones resto definidos para cada ítem. Para ello, define la puntuación resto - para cada ítem  $i$ :  $1, \dots, n$ , como la puntuación total  $X$ , menos la puntuación al ítem  $i$ , ( $R = X - X_i$ ).

Dada la puntuación resto para cada ítem  $i$ , se estima la proporción de respuestas positivas. Si se considera el conjunto de las puntuaciones resto en todos los ítems, los sujetos que tienen la misma puntuación resto forman un grupo de puntuación resto. Los diferentes grupos de puntuaciones resto se ordenan en orden no decreciente, en función de sus puntuaciones resto  $R$  que asumen valores  $r: 0, \dots, n-1$  para  $n$  ítems dicotómicos.

En cada grupo de puntuaciones resto se estima la proporción de sujetos que da una respuesta positiva a un ítem  $i$ . Esta proporción se denota  $\pi_{ir}$   $r: 1, \dots, n-1$ , y se estima

$$\hat{\pi}_{ri} = \frac{N_{ri}}{N_r},$$

siendo  $N_{ri}$  el número de sujetos de la muestra que tiene la puntuación resto igual a  $R$  y dan una respuesta positiva al ítem  $i$ , y  $N_r$  el número de sujetos de la muestra que tienen la puntuación resto igual a  $R$ .

Un ítem es HM, si dada la puntuación resto no decreciente para este ítem, entonces las proporciones  $\pi_{ir}$  son monótonas no decrecientes en  $r$  (Rosenbaum, 1984).

El contraste de hipótesis  $H_0: \pi_{ir} - \pi_{r-1i} \leq 0$ ,  $H_1: \pi_{ir} - \pi_{r-1i} > 0$ , se puede llevar a cabo con el test de Fisher, para muestras de tamaño pequeño, y con el test  $\chi^2$ , para muestras independientes de gran tamaño, considerando tablas  $2 \times 2$  de grupos de puntuaciones resto ( $R-1$ ,  $R$ ) y puntuación del ítem  $X_i(0,1)$ .

Detectar ítems que no verifiquen la HM es importante, porque estos pueden impedir que el orden de los sujetos sea independiente de los ítems.

3.1.4. Para Ellis y Wollenberg (1993) las condiciones anteriores prueban sólo la Monotonía de las CCI, y proponen que la Homogeneidad se verifica en la población si y sólo si las mismas CCI se obtienen en toda subpoblación con el mismo rasgo latente que la población considerada. Es decir, una CCI monótona y homogénea (MH) equivale a la invarianza de la CCI en las subpoblaciones, o a que el ítem es insesgado en el sentido de la definición de Lord (1980). Por tanto, se debe probar que las CCI monótonas son invariantes en las subpoblaciones en las que tenga sentido. Esto es, que las probabilidades de respuesta correcta dependan sólo del valor del rasgo latente de los sujetos y no de otras características de los mismos (Molenaar et al. 1994, p. 85).

Puesto que una medida es aceptable si todos los ítems miden el mismo rasgo en todos los sujetos. En modelos CCI monótonas no homogéneas no se puede considerar esta interpretación.

### 3.2. Bondad del ajuste del modelo de Doble Monotonía

La HM junto con la monotonía de las dificultades de los ítems proporcionan una condición suficiente para la DM. Por ello, una vez que se ha probado que las CCI de un conjunto de ítems son HM, los procedimientos siguientes prueban si las CCI no intersecan.

3.2.1. Monotonía de las dificultades de los ítems. Mokken (1971) propone ordenar los



items según el orden decreciente inducido por la dificultad,  $\delta_n > \delta_{n-1} > \delta_{n-2} > \dots > \delta_1$ , en la primera fila y columna de las matrices  $P_{11} = (P_{ij}(1,1))$  y  $P_{00} = (P_{ij}(0,0))$ , e investigar la monotonía de las dificultades de los items, analizando visualmente las proporciones de dos respuestas positivas a cada par de items, dadas en  $P_{11} = (P_{ij}(1,1))$ , y las proporciones de dos respuestas negativas a cada par de items, dadas en  $P_{00} = (P_{ij}(0,0))$ . (Ver  $P_{11}$  en Tabla 1; una matriz similar se tendría para  $P_{00}$ ).

Tabla 1. Matriz  $P_{11}$ 

Items	j					
	$i_n$	$i_{n-1}$	$i_{n-2}$	$i_{n-3}$	...	$i_1$
$i_n$	-	$P_{n,n-1}$	$P_{n,n-2}$	$P_{n,n-3}$	...	$P_{n,1}$
$i_{n-1}$		-	$P_{n-1,n-2}$	$P_{n-1,n-3}$	...	$P_{n-1,1}$
$i_{n-2}$			-	$P_{n-2,n-3}$	...	$P_{n-2,1}$
$i_{n-3}$				-		$P_{n-3,1}$
...					...	...
					-	
$i_1$						-
$\delta_j$	$\delta_n$	$\delta_{n-1}$	$\delta_{n-2}$	$\delta_{n-3}$	...	$\delta_1$

Ordenados los items según la dificultad decreciente, el conjunto de items es DM si las filas y columnas de  $P_{11}$  son monótonas no decrecientes y las filas y columnas de  $P_{00}$  son monótonas no crecientes. Si se encuentran desviaciones locales de estos órdenes - a partir de los resultados obtenidos en las muestras - éstas indican que las CCI presentan intersección. Esto permite identificar items cuyas CCI intersecan con las de otros items y que hacen que el conjunto de ítems no sea DM.

El contraste de la hipótesis nula de que no existen desviaciones locales en la población se puede llevar a cabo con un test no paramétrico.

3.2.2. Meijer, Sijtsma y Smid (1990, p. 289) muestran otro procedimiento propuesto por Molenaar (1982, 1986) que se basa en las tablas 2x2 - ítem x ítem - formadas con los distintos grupos de puntuaciones del test. Estas tablas contienen la proporción de sujetos que da una respuesta positiva al ítem i y negativa al ítem j,  $\pi_{ij}(1,0)$ , y la proporción de sujetos que da una respuesta negativa al ítem i y positiva al ítem j,  $\pi_{ij}(0,1)$ . Si para estos items  $\pi_i \leq \pi_j$  y sus CCI no intersecan, en cada grupo de puntuaciones en el test, se verifica que  $\pi_{ij}(1,0) \leq \pi_{ij}(0,1)$ . Por tanto, si en la muestra se encuentran resultados en otra dirección, es decir  $\pi_{ij}(1,0) > \pi_{ij}(0,1)$ , indican que las CCI de estos items presentan intersección, y por tanto que no se verifica la DM.

El contraste de hipótesis acerca de que las proporciones son iguales,

$$H_0 = \frac{\pi_{ij}(1,0)}{(\pi_{ij}(1,0) + \pi_{ij}(0,1))} = 0,5$$

frente la alternativa

$$H_1 = \frac{\pi_{ij}(1,0)}{(\pi_{ij}(1,0) + \pi_{ij}(0,1))} > 0,5$$

se lleva a cabo en los grupos de puntuaciones del test, con el test de McNemar.

3.2.3. Otro método propuesto por Rosenbaum (1987) analiza el orden de las probabilidades de éxito en dos ítems  $i, j$ , basándose en los grupos de puntuaciones resto que se determinan para los  $n-2$  ítems restantes. Si las CCI de los ítems  $i, j$  no intersecan, la proporción de respuestas positivas al ítem  $i$  debería ser menor o igual que la del ítem  $j$  en cada grupo de puntuaciones resto. También existe un test para contrastar esta hipótesis en la población.

3.2.4. Sijtsma y Meijer (1992) obtienen, por analogía con  $H$  y  $H_i$ , los coeficientes  $H^T$  y  $H_a^T$  respectivamente, a partir de la matriz de respuestas traspuesta para investigar la no intersección de las CCI. Las expresiones de estos coeficientes son:

El coeficiente  $H^T$  para  $N$  sujetos:

$$H^T = \frac{\sum_{a < b} \sigma_{ab}}{\sum_{a < b} \sigma_{ab}(\max)} \quad (10)$$

El coeficiente  $H_a^T$  de un sujeto  $a$  con relación a los  $N-1$  restantes:

$$H_a^T = \frac{\sum_{b \neq a} \sigma_{ab}}{\sum_{b \neq a} \sigma_{ab}(\max)} \quad (11)$$

Un conjunto de  $n$  ítems tienen CCI que no intersecan si  $0 \leq H^T \leq 1$ , siendo  $H^T$  si y sólo si las  $n$  CCI coinciden excepto como máximo en un valor de  $\theta$ . Cuanto mayor es el valor positivo de  $H^T$ , más confianza se tiene al considerar un orden invariante de los ítems en  $\theta$ .

En la práctica se debe verificar que  $H^T \geq c'$  y que el porcentaje de  $H_a^T$  negativos  $< c''$ , siendo  $c'$  y  $c''$  valores positivos. Si alguna de estas condiciones no se verifica, el orden de los ítems difiere en un número importante de sujetos. Estos autores proponen trabajar en la práctica con los valores  $c' = 0,3$  y  $c'' = 10$  obtenidos en un estudio de simulación.

#### 4.- Fiabilidad de un conjunto de ítems bajo el modelo de Mokken.

Los coeficientes  $\alpha$  o  $\lambda-2$  (Guttman, 1945) se utilizan para estimar la fiabilidad si un conjunto de ítems MH.

Si el conjunto de ítems es DM, Mokken (1971) propone dos procedimientos para estimar la fiabilidad  $\rho$ . El valor de este coeficiente es  $0 \leq \hat{\rho} \leq 1$ , y cotas obtenidas de la práctica sugieren que  $\hat{\rho} \geq 0.70$  para considerar una escala acumulada fiable.

Molenaar y Sijtsma (1984) y Sijtsma y Molenaar (1987), proponen un tercer procedimiento para obtener un coeficiente de fiabilidad con menos sesgo que el anterior.

Las expresiones de los distintos coeficientes que proporcionan estos procedimientos se muestran en el Apéndice 1.

## **5.- Aplicación: Ajuste de una escala Acumulada con MSP 4.0.**

Se presenta el estudio con 12 ítems dicotómicos, que requieren distintos niveles de razonamiento inductivo numérico. Cada ítem representa una serie de distinta dificultad. La tarea que debe realizar el sujeto es completar el término general de la serie. Las respuestas de los sujetos se codifican de forma binaria, indicando las respuestas 0, 1 que la serie se ha completado de forma incorrecta o correcta, respectivamente. La definición de las series se presentan en el Apéndice 2.

### **5.1. Sujetos**

La muestra examinada la forman 400 niños y niñas, de los cursos 1º a 6º de EGB, con edades entre 6 y 12 años, de distinto nivel sociocultural, con procedencia de colegios Público - Urbano, Público - Rural y Privado - Urbano.

De este grupo se han formado tres subgrupos atendiendo a niños que reciben distinto tipo de enseñanza (Grupo1: Público- Urbano; Grupo 2: Público- Rural; Grupo 3: Privado-Urbano), en los que están representadas todas las edades y los grupos son similares con respecto a la edad media y la desviación típica.

### **5.2. Procedimiento**

Antes de probar la HM, en Rivas (1998) se ha probado la unidimensionalidad de los 12 ítems en el grupo total y en los tres subgrupos considerados anteriormente.

En este apartado se muestran las etapas que se van a seguir, con el programa MSP 4.0, para analizar que el conjunto de 12 ítems es DM.

5.2.1. La evaluación de la HM se ha llevado a cabo con los siguientes estudios.

a.- El estudio de los coeficientes de acumulatividad. Se ha utilizado el valor 0,30, que asume por defecto el programa MSP 4.0, aunque se puede especificar otra cota inferior  $H_i$  ó  $H$  para que los ítems sean HM.

b.- El estudio de la monotonía de las proporciones de respuestas correctas en los grupos de puntuaciones resto.

En esta etapa del análisis se puede indicar el número mínimo de sujetos que deben tener los grupos de puntuaciones resto, por defecto es  $N/5$  y el valor que se asume en esta aplicación

es 25. También se puede elegir el número mínimo de violaciones (MINVI) de la HM que se está dispuesto a aceptar, se ha asumido el valor mínimo por defecto que es  $INVI=0,02$ .

c.- El análisis de la invarianza de las CCI en diferentes subgrupos extraídos de la muestra

5.2.2. Una vez verificada la HM, la DM se investiga a partir de:

a.- La inspección visual de las matrices  $P_{11} = (P_{ij}(1,1))$  y  $P_{00} = (P_{ij}(0,0))$ , una análisis global y otro específico para cada ítem.

b.- La monotonía de las proporciones de respuesta correcta en los grupos de puntuaciones resto.

El número de grupos de puntuaciones resto (#rg) se construye ahora de forma que para cada par de ítems que se comparan deben coincidir las puntuaciones resto, lo que en principio no tiene porqué ocurrir.

Las violaciones mostrarán que hay desviaciones locales de la monotonía, y esto que las CCI de esos dos ítems intersecan.

c.- Los coeficientes  $H_a^T$  y  $H^T$ .

A continuación se muestra la evaluación de la HM, la DM y la fiabilidad de la escala obtenida, aplicando estos procedimientos.

### 5.3. Resultados

Se muestran los resultados obtenidos con las respuestas dadas por los sujetos de la muestra para analizar si los 12 ítems forman una escala DM. Se presentan y discuten los resultados de la bondad del ajuste de los modelos de HM y DM y fiabilidad de la escala.

Estos resultados se obtienen con el procedimiento 'paso a paso' que utiliza el programa MSP 4.0. El procedimiento ha seleccionado los 12 ítems, en 11 etapas, para formar una escala. Las frecuencias de las respuestas (Ver Tabla 2) muestran que el orden de los ítems 9, 10 y 11 debería cambiar. Ello indica que el orden de los ítems establecido a priori por el investigador (Ver Apéndice 2), se debería sustituir por éste si el conjunto de ítems verifica la DM.

**Tabla 2.** Distribución de frecuencias y proporción de respuestas a los ítems

Item	Media	Frecuencia	
		0	1
ITEM1	0,90	40	360
ITEM2	0,82	73	327
ITEM3	0,80	81	319
ITEM4	0,79	84	316
ITEM5	0,74	105	295
ITEM6	0,57	173	227
ITEM7	0,55	180	220
ITEM8	0,34	263	137
ITEM9	0,17	334	66
ITEM10	0,15	339	61
ITEM11	0,19	323	77
ITEM12	0,09	365	35

El orden en que los ítems formarían una escala acumulada, según la dificultad decreciente, es ítem1 a ítem8, ítem11, ítem9, ítem10 e ítem12, pero antes se debe mostrar que verifican la HM y la DM.

### 5.3.1. Evaluación de la Homogeneidad Monótona

a.- En la Tabla 3 se observa que se verifica la condición necesaria para analizar la HM, puesto que todos los valores  $H_{ij}$ .

**Tabla 3:** Matriz de coeficientes  $H_{ij}$ 

	ITEM12	ITEM10	ITEM9	ITEM11	ITEM8	ITEM7	ITEM6	ITEM5	ITEM4	ITEM3	ITEM2	ITEM1
ITEM12												
ITEM10	0,53											
ITEM9	0,66	0,74										
ITEM11	0,89	0,63	0,64									
ITEM8	0,61	0,53	0,61	0,53								
ITEM7	0,75	0,71	0,73	0,74	0,81							
ITEM6	0,93	0,77	0,89	0,88	0,88	0,65						
ITEM5	1,00	1,00	1,00	1,00	0,97	0,93	0,92					
ITEM4	1,00	1,00	1,00	0,94	0,97	0,94	0,90	0,81				
ITEM3	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,87	0,85	0,82	0,73			
ITEM2	1,00	0,91	0,92	0,93	0,80	0,78	0,73	0,70	0,72	0,62		
ITEM1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,95	0,96	0,93	0,91	0,91	0,82	

En la Tabla 4 se presentan los coeficientes  $H_i$  de cada ítem.

**Tabla 4:** Coeficientes  $H_i$  de los ítems

Item	H	Z
ITEM12	0,77	17,12
ITEM10	0,72	20,74
ITEM9	0,76	22,53
ITEM11	0,76	22,89
ITEM8	0,77	24,96
ITEM7	0,80	28,82
ITEM6	0,83	30,01
ITEM5	0,88	31,42
ITEM4	0,85	30,04
ITEM3	0,83	28,98
ITEM2	0,75	25,28
ITEM1	0,92	23,24

El coeficiente de escalabilidad de los 12 ítems es  $H = 0,80$ .

Todos los ítems verifican la HM porque los coeficientes de acumulatividad satisfacen las cotas:  $H_{ij} > 0$ ,  $H_i \geq 3$  y  $H \geq 0,3$ .

b.- Análisis de la proporción de sujetos que responde correctamente un ítem en los grupos de puntuaciones resto.

Los resultados para cada ítem y un resumen para todos los ítems se muestran en las tablas 5a y 5b.

**Tabla 5a.** Análisis global de las violaciones de la HM en los grupos de puntuaciones resto.

	H(g)	#ap	#vi	#vi/#ap	maxvi	suma	suma/#ap	zmax	grupo	#zsig
ITEM1	0.92	6	0							
ITEM2	0.75	29	0							
ITEM3	0.83	10	1	0.10	0.04	0.04	0.00	0.13	4 5	0
ITEM4	0.85	11	0							
ITEM5	0.88	6	0							
ITEM6	0.83	16	0							
ITEM7	0.80	15	0							
ITEM8	0.77	10	0							
ITEM9	0.76	10	0							
ITEM10	0.72	10	1	0.10	0.03	0.03	0.00	0.31	5 6	0
ITEM11	0.76	15	0							
ITEM12	0.77	7	1	0.14	0.02	0.02	0.00	0.19	5 6	0

Nota: #ap : Número de pares; #vi: Número de violaciones

En la Tabla 5a se observa que los ítems 3, 10 y 12 presentan desviaciones de la HM en los grupos de puntuaciones resto. Estas se observan en las proporciones mayores que 0,02.

En la Tabla 5b se presenta el análisis detallado de las desviaciones de la HM para los ítems 3, 10 y 12.

**Tabla 5b.** Análisis detallado de las violaciones de la HM en los grupos de puntuaciones resto.

ITEM3										
Grupo Punt.	Frecuencias				Proporciones de respuestas					
Resto	N	de ítems			Media	positivas por ítem				
Bajo	Alto									
		0	1			>= 1				
1	0	32	32	0	0.00	0.00				
2	1	25	21	4	0.16	0.16				
3	2 - 3	53	18	35	0.66	0.66				
4	4	36	2	34	0.94	0.94				
5	5	44	4	40	0.91	0.91				
6	6	64	4	60	0.94	0.94				
7	7	64	0	64	1.00	1.00				
8	8	27	0	27	1.00	1.00				
9	9 - 11	55	0	55	1.00	1.00				
Item	#ap	#vi	#vi/#ap	maxvi	suma	suma/#ap	zmax	group	#zsig	
ITEM3	10	1	0.10	0.04	0.04	0.00	0.13	4 5	0	
ITEM10										
Grupo Punt.	Frecuencias				Proporciones de respuestas					
Resto	N	de ítems			Media	positivas por ítem				
Bajo	Alto									
		0	1			>= 1				
1	0	32	32	0	0.00	0.00				
2	1 - 2	37	37	0	0.00	0.00				
3	3 - 4	43	43	0	0.00	0.00				
4	5	38	38	0	0.00	0.00				
5	6	49	44	5	0.10	0.10				
6	7	59	55	4	0.07	0.07				
7	8	68	60	8	0.12	0.12				
8	9	30	19	11	0.37	0.37				
9	10 - 11	44	11	33	0.75	0.75				
Item	#ap	#vi	#vi/#ap	maxvi	suma	suma/#ap	zmax	group	#zsig	
ITEM10	10	1	0.10	0.03	0.03	0.00	0.31	5 6	0	
ITEM12										
Grupo Punt.	Frecuencias				Proporciones de respuestas					
Resto	N	de ítems			Media	positivas por ítem				
Bajo	Alto									
		0	1			>= 1				
1	0	32	32	0	0.00	0.00				
2	1 - 2	37	37	0	0.00	0.00				
3	3 - 4	43	43	0	0.00	0.00				
4	5	38	38	0	0.00	0.00				
5	6	45	44	1	0.02	0.02				
6	7	59	59	0	0.00	0.00				
7	8	70	64	6	0.09	0.09				
8	9	26	21	5	0.19	0.19				
9	10 - 11	50	27	23	0.46	0.46				
Item	#ap	#vi	#vi/#ap	maxvi	suma	suma/#ap	zmax	group	#zsig	
ITEM12	7	1	0.14	0.02	0.02	0.00	0.19	5 6	0	
MINVI= 0.02 Nivel de significación= 0.05										

Se observa que para el ítem 3 se forman 9 grupos de puntuaciones resto. En la columna de proporciones de respuestas correctas hay desviación de la monotonía en los grupos 4 y 5; ya que la proporción de sujetos que responde positivamente el ítem 3 es  $34/36 = 0,94$ , en la puntuación resto 4, y  $40/44 = 0,91$ , en la puntuación resto 5, por tanto hay una desviación de  $0,94 - 0,91 = 0,03$ , para que el orden de las proporciones de respuestas correctas al ítem 3,

en los grupos de puntuaciones resto, sea no decreciente.

Análogamente ocurre con los ítems 10 y 12. En el ítem 10 la desviación es 0,03, y el ítem 12 es 0,02, correspondiendo en el ítem 10 a una fracción observada de violaciones  $\#vi / \#ap = 0,10$  y el ítem 12  $\#vi / \#ap = 0,14$ . Puesto que el valor máximo de estas fracciones es uno, estas proporciones no se consideran excesivamente altas.

Además, este análisis se podría volver a realizar aumentando el tamaño de los grupos de puntuaciones resto, para evitar que en estos grupos pequeños dichas violaciones puedan ocurrir por azar.

c.- Invarianza de la escala en subgrupos definidos por la diversa procedencia de los sujetos y homogéneos según la edad.

La Tabla 6 muestra que los tres subgrupos son homogéneos según la edad.

**Tabla 6.** Frecuencias y estadísticos descriptivos de la edad en los grupos

EDAD	GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3	GLOBAL
6	17	13	22	52
7	16	16	20	52
8	28	10	35	73
9	19	11	25	55
10	26	23	26	75
11	16	15	33	64
12	11	7	11	29
TOTAL	133	95	172	400
MEDIA	8,85	8,93	8,91	8,89
DESV. TÍPICA	1,81	1,89	1,82	1,83

En la Tabla 7 se presentan las proporciones de respuesta correcta a los ítems en cada subgrupo. En ella se observa que globalmente no existe desviación de la monotonía.



**Tabla 7.** Proporciones de respuesta correcta a los ítems en cada subgrupo

Grupo	Total	1	2	3
Items	Proporción			
ITEM12	0.09	0.06	0.05	0.13
ITEM10	0.15	0.11	0.15	0.19
ITEM9	0.17	0.11	0.17	0.20
ITEM11	0.19	0.12	0.15	0.27
ITEM8	0.34	0.23	0.37	0.42
ITEM7	0.55	0.50	0.47	0.63
ITEM6	0.57	0.50	0.48	0.66
ITEM5	0.74	0.71	0.68	0.78
ITEM4	0.79	0.71	0.73	0.88
ITEM3	0.80	0.73	0.75	0.88
ITEM2	0.82	0.75	0.75	0.91
ITEM1	0.90	0.90	0.82	0.94

Los coeficientes de acumulatividad en cada subgrupo son  $\hat{H} = 0,80$  (Grupo 1),  $\hat{H} = 0,82$  (Grupo 2) y  $\hat{H} = 0,73$  (Grupo 3). En los tres subgrupos la escala es fuerte atendiendo al valor de  $\hat{H}$ .

Se ha probado que los ítems y el orden en que son acumulados coincide en los tres subgrupos y en el grupo total. Estos resultados junto con los de los apartados anteriores muestran que las CCI son monótonas no decrecientes o que los ítems satisfacen la HM.

### 5.3.2. Evaluación de la Doble Monotonía

a.- Análisis de la DM a partir de las matrices  $P_{11} = (P_{ij}(1,1))$  y  $P_{00} = (P_{ij}(0,0))$ .

En primer lugar las Tablas 8 y 9 muestran las proporciones de sujetos que responden correcta e incorrectamente a cada par de ítems. Puesto que ambas son simétricas basta analizar en cada una la mitad triangular superior o inferior. En ambas matrices el orden de las dificultades de los ítems es  $\delta_{12} > \delta_{10} > \delta_9 > \dots > \delta_1$ .

**Tabla 8.** Matriz  $P_{11} = (P_{ij}(1,1))$  de proporciones de sujetos que responden correctamente a cada par de ítems

	ITEM12	ITEM10	ITEM9	ITEM11	ITEM6	ITEM7	ITEM5	ITEM8	ITEM4	ITEM3	ITEM2	ITEM1
P	0.09	0.15	0.17	0.19	0.34	0.55	0.57	0.74	0.79	0.80	0.82	0.90
ITEM12	0.09	0.05	0.06	0.06	0.07	0.08	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
ITEM10	0.15	0.05	0.12	0.11	0.10	0.13	0.14	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
ITEM9	0.17	0.06	0.12	0.12	0.12	0.14	0.16	0.17	0.17	0.17	0.16	0.17
ITEM11	0.19	0.08	0.11	0.12	0.13	0.17	0.18	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19
ITEM6	0.34	0.07	0.10	0.12	0.13	0.31	0.33	0.34	0.34	0.34	0.33	0.34
ITEM7	0.55	0.08	0.13	0.14	0.17	0.31	0.47	0.54	0.54	0.54	0.53	0.55
ITEM5	0.57	0.09	0.14	0.16	0.18	0.33	0.47	0.56	0.56	0.55	0.54	0.56
ITEM8	0.74	0.09	0.15	0.17	0.19	0.34	0.54	0.56	0.71	0.71	0.70	0.73
ITEM4	0.79	0.09	0.15	0.17	0.19	0.34	0.54	0.56	0.71	0.75	0.75	0.78
ITEM3	0.80	0.09	0.15	0.17	0.19	0.34	0.54	0.55	0.71	0.75	0.74	0.79
ITEM2	0.82	0.09	0.15	0.16	0.19	0.33	0.53	0.54	0.70	0.75	0.74	0.80
ITEM1	0.90	0.09	0.15	0.17	0.19	0.34	0.55	0.56	0.73	0.78	0.79	0.80

En la matriz triangular superior  $P_{11} = (P_{ij}(1,1))$ , las proporciones no decrecen por filas ni por columnas, salvo en la segunda fila los valores 0,12; 0,11; 0,10 y 0,13, y en la penúltima columna 0,70; 0,75 y 0,74.

**Tabla 9.** Matriz  $P_{00} = (P_{ij}(0,0))$  de proporciones de sujetos que responden incorrectamente a cada par de ítems

	ITEM12	ITEM10	ITEM9	ITEM11	ITEM6	ITEM7	ITEM5	ITEM8	ITEM4	ITEM3	ITEM2	ITEM1
P	0.91	0.85	0.83	0.81	0.66	0.45	0.43	0.26	0.21	0.20	0.18	0.10
ITEM12	0.91	0.81	0.81	0.81	0.64	0.44	0.43	0.26	0.21	0.20	0.18	0.10
ITEM10	0.85	0.81	0.80	0.76	0.61	0.43	0.42	0.26	0.21	0.20	0.18	0.10
ITEM9	0.83	0.81	0.80	0.76	0.61	0.43	0.42	0.26	0.21	0.20	0.18	0.10
ITEM11	0.81	0.80	0.76	0.76	0.60	0.43	0.42	0.26	0.21	0.20	0.18	0.10
ITEM6	0.66	0.64	0.61	0.61	0.60	0.42	0.41	0.26	0.21	0.20	0.17	0.10
ITEM7	0.45	0.44	0.43	0.43	0.43	0.42	0.35	0.25	0.20	0.19	0.16	0.10
ITEM5	0.43	0.43	0.42	0.42	0.42	0.41	0.35	0.25	0.20	0.18	0.15	0.10
ITEM8	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.25	0.25	0.18	0.18	0.17	0.14	0.10
ITEM4	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.20	0.20	0.18	0.16	0.16	0.14	0.09
ITEM3	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.19	0.18	0.17	0.16	0.15	0.13	0.09
ITEM2	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.17	0.16	0.15	0.14	0.14	0.13	0.09
ITEM1	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.09	0.09	0.09	0.09

En la matriz triangular superior  $P_{00} = (P_{ij}(0,0))$  las proporciones no crecen por filas ni por columnas.

Después de analizar las Tablas 8 y 9, y considerando aceptable una desviación mínima de 0,02, se observan pequeñas violaciones de la DM. En la segunda fila hay una desviación  $0,13-0,10=0,03$  y en la penúltima columna hay una desviación  $0,75-0,70=0,05$ . Ambas desviaciones son casi inapreciables.

El programa MSP 4.0 proporciona también un resumen de las desviaciones de la DM para cada ítem, que se muestra en la Tabla 10.

**Tabla 10.** Resumen del análisis de la DM a partir de  $P_{11} = (P_{ij}(1,1))$  y  $P_{00} = (P_{ij}(0,0))$ 

	#ac	#vi	#vi/#ac	maxvi	suma	suma/#ac
ITEM1	110	0				
ITEM2	110	0				
ITEM3	110	0				
ITEM4	110	0				
ITEM5	110	0				
ITEM6	110	0				
ITEM7	110	0				
ITEM8	110	0				
ITEM9	110	0				
ITEM10	110	0				
ITEM11	110	0				
ITEM12	110	0				

**Nota :** #ac : Número de pares ; #vi : Número de violaciones

Si se considera una violación mínima aceptable de 0,02, globalmente no se observa ninguna desviación de la DM, (Ver Tabla 10)

b.- Análisis de la DM en los grupos de puntuaciones resto

En la Tabla 11a, después de considerar una violación mínima aceptable de 0,02 y que el mínimo tamaño de los grupos de puntuaciones resto sea 80, se observan desviaciones de la DM en los items 2,3,4 y 5, siendo los valores de estas desviaciones 0,11; 0,07 ; 0,07 y 0,04 respectivamente. De ellos, los items que presentan peor comportamiento son los items 2, 3 y 4.

**Tabla 11a.** Resumen del análisis de la DM en los grupos de puntuaciones resto

	#rg	#vi	#vi/#rg	maxvi	suma	suma/#rg	zmax	#zsig
ITEM1	29	0						
ITEM2	28	3	0.11	0.05	0.10	0.00	1.81	1
ITEM3	28	2	0.07	0.03	0.05	0.00	1.55	0
ITEM4	29	2	0.07	0.05	0.07	0.00	1.81	1
ITEM5	27	1	0.04	0.03	0.03	0.00	0.95	0
ITEM6	27	0						
ITEM7	28	0						
ITEM8	32	0						
ITEM9	23	0						
ITEM10	23	0						
ITEM11	22	0						
ITEM12	24	0						

**Nota :** #rg : Número de grupos de puntuaciones resto ; #vi : Número de violaciones

La Tabla 11b proporciona información sobre el número de grupos de puntuaciones resto donde hay violaciones y los ítems concretos que las presentan con un ítem determinado.

**Tabla 11b.** Análisis de los items en los que hay desviación de la DM en los grupos de puntuaciones resto

ITEM5 con									
	#rg	#vi	#vi/#rg	maxvi	suma	suma/#rg	zmax	#zsig	
ITEM2 total	3	1	0.33	0.03	0.03	0.01	0.95	0	
otros pares	24	0							
	---	---			----				
	27	1	0.04	0.03	0.03	0.00	0.95	0	
ITEM4 con									
	#rg	#vi	#vi/#rg	maxvi	suma	suma/#rg	zmax	#zsig	
ITEM3 total	3	1	0.33	0.02	0.02	0.01	0.89	0	
ITEM2 total	3	1	0.33	0.05	0.05	0.02	1.81	1	
otros pares	23	0							
	---	---			----				
	29	2	0.07	0.05	0.07	0.00	1.81	1	
ITEM3 con									
	#rg	#vi	#vi/#rg	maxvi	suma	suma/#rg	zmax	#zsig	
ITEM4 total	3	1	0.33	0.02	0.02	0.01	0.89	0	
ITEM2 total	2	1	0.50	0.03	0.03	0.01	1.55	0	
otros pares	23	0							
	---	---			----				
	28	2	0.07	0.03	0.05	0.00	1.55	0	
ITEM2 con									
	#rg	#vi	#vi/#rg	maxvi	suma	suma/#rg	zmax	#zsig	
ITEM5 total	3	1	0.33	0.03	0.03	0.01	0.95	0	
ITEM4 total	3	1	0.33	0.05	0.05	0.02	1.81	1	
ITEM3 total	2	1	0.50	0.03	0.03	0.01	1.55	0	
otros pares	20	0							
	---	---			----				
	28	3	0.11	0.05	0.10	0.00	1.81	1	

Se observa que el número de grupos en los que hay desviación es pequeño, generalmente 2 ó 3 grupos.

La Tabla 11c proporciona información detallada de las desviaciones de la DM para cada par de items.



Esta figura muestra que hay un gran número de sujetos con valores de  $H_a^T$  positivos.

Para obtener  $H^T$  se excluyen 47 observaciones con modelos de respuesta extrema (32 con respuesta cero y 15 con respuesta uno en todos los ítems). Siendo las observaciones excluidas:

11 12 14 15 16 17 18 19 37 38 39 70 90 113 132 133 144 152 156 177 214 272 276 287 288  
292 298 305 306 308 311 312 313 315 316 322 325 327 331 344 350 370 385 386 390 393  
400

El valor de  $H^T$  con las 353 observaciones restantes es:

$H^T$  del grupo total = 0,86

Número de valores  $H_a^T$  negativos = 1

Porcentaje de valores  $H_a^T$  negativos = 0,3

Por tanto,  $H^T > = 0,30$  y Porcentaje de valores  $H_a^T$  negativos  $< 10$

Atendiendo a los resultados anteriores se concluye que el conjunto de los 12 ítems con el orden establecido satisface la DM.

5.3.3. Fiabilidad y estadísticos descriptivos de las puntuaciones del grupo en el conjunto de ítems

Puesto que se verifica la DM, se puede interpretar la fiabilidad de la escala en el grupo total  $\hat{\rho} = 0,9236$ .

Además, en la Tabla 12, se muestra el resumen de la distribución de las puntuaciones de los 12 ítems que forman la escala.

**Tabla 12.** Estadísticos descriptivos de las puntuaciones del grupo en los 12 ítems

Puntuación en la escala	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencias	32	21	16	16	27	38	44	60	64	27	18	22	15
Número de casos	= 400												
Media	= 6.10												
Varianza	= 10.39						Desviación típica						= 3.22
Sesgo	= -0.30												
Curtosis	= -0.62												

## 6.- Discusión.

En el marco de la TRI paramétrica hay modelos de CCI que deben ajustarse a un determinado tipo de función exponencial, y los procedimientos de estimación de parámetros, basados en el Método de la Máxima Verosimilitud, requieren grandes muestras de sujetos para que los parámetros se puedan estimar con mínima precisión. Como consecuencia de estos, y

otros fuertes supuestos, permiten obtener resultados atractivos y elegantes como es por ejemplo que el modelo de Rasch proporciona una medida de los sujetos y de los ítems en una escala de intervalo o de razón. Además, en ocasiones, en Psicología, no se tiene una medida clara y precisa del atributo latente que se pretende medir y, como consecuencia, ello no va a permitir que se puedan establecer diferencias entre sujetos en escalas métricas. Por tanto, es conveniente disponer de otros modelos con supuestos más débiles, cuyo ajuste no requiera que las proporciones de respuestas positivas que dan los sujetos provengan de una determinada distribución, y que el ajuste del modelo al menos permita ordenar a sujetos y/o a ítems con cierto grado de precisión.

En los apartados anteriores se han descrito los supuestos de los modelos de TRI no paramétricos de Mokken - HM y DM - para ítems con respuesta dicotómica, y los procedimientos para evaluar la bondad del ajuste que se pueden aplicar utilizando el programa MSP 4.0. Recientemente Molenaar, Sijtsma, Van Schuur y Mokken han publicado una nueva versión del programa MSP (MSP5), en el entorno Windows, para ajustar este modelo. Esta nueva versión introduce algunas innovaciones metodológicas, permite obtener representaciones gráficas de las CCI, de las distribuciones de puntuaciones, de los errores Guttman, etc.

También se ha mostrado una aplicación en la que se prueba que un conjunto de 12 ítems forma una escala Doblemente Monótona. El valor del coeficiente de acumulatividad indica que la escala es fuerte ( $\hat{H} = 0,80$ ), y el valor de la precisión de la medida indica que la escala formada por los 12 ítems es fiable ( $\hat{\rho} = 0,92$ ). Estos resultados permiten ordenar a los sujetos de la muestra y a los ítems en una escala unidimensional. Por último, los estadísticos descriptivos de las puntuaciones en la escala acumulada, indican que dicha distribución es sesgada, y por tanto, no se puede considerar que provenga de una población Normal, por lo que no se ha interpretado la significación estadística de los coeficientes de acumulatividad ni de otros índices obtenidos. Por ello, no se generalizan los resultados de este estudio a la población de la que se ha extraído la muestra.

## 7.- Referencias.

Ellis, J.L. y Wollenberg, A.L. van den (1993). Local Homogeneity in latent trait models. A characterization of the homogeneous monotone IRT model. *Psychometrika*, 58, 417-429.

Gifi, A. (1990). *Nonlinear Multivariate Analysis*. New York: Wiley

Grayson, D.A. (1988). Two-group classification in latent trait theory: Scores with monotone likelihood ratio. *Psychometrika*, 53, 383-392.

Guttman, L. (1945). A basis for analyzing test-retest reliability. *Psychometrika*, 10, 255-282.

- Guttman, L. (1950). The basis for scalogram analysis. In S.A. Stouffer, L. Guttman, E.A., Suchman, P.F., Lazarsfeld, S.A. Star, & J.A. Clausen (Eds.), *Measurement and prediction*. Princeton: Princeton University Press.
- Lord, F.M. (1980). *Applications of item response theory to practical testing problems*. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.
- Martínez, M. R. y Rivas, T. (1990). Análisis de escalas acumulativas: Modelo Probabilístico de Mokken para ítems dicotómicos. *Psicothema*, 3, 199-218.
- Meijer, R.R., Sijtsma, K. y Smid, N.G. (1990). Theoretical and empirical comparison of the Mokken and the Rasch approach to IRT. *Applied Psychological Measurement*, 14, 283-298.
- Mokken, R.J. (1971). *A Theory and procedure of scale analysis*. The Hague: Mouton.
- Mokken, R.J. (1997). Nonparametrics models for dichotomous responses. En W.J. van der Linden y R.K. Hambleton (Eds.). *Handbook of Modern Item Response Theory*. New York: Springer.
- Mokken, R.J. y Lewis, C. (1982). A nonparametric approach to the analysis of dichotomous item responses. *Applied Psychological Measurement*, 6, 417-430.
- Mokken, R.J., Lewis, C. y Sijtsma, K.(1986). Rejoinder to " the Mokken scale: A critical discussion". *Applied Psychological Measurement*, 10, 279-285.
- Molenaar, I.W. (1982). Mokken scaling revisited. *Kwantitatieve Methoden*, 3, 145-164.
- Molenaar, I.W. (1983). Rasch, Mokken and school experience. In S. Lindenberg & F.N. Stokman (Eds.) *Modellen in the Sociologie*. Deventer: Van Loghum Slaterus.
- Molenaar, I.W. (1986). An exercise in item response theory for three ordered response categories. In G.F. Pikkemaat, y J.J.A. Moors (Eds.), *Liber amicorum Jaap Muilwijk*. Groningen: Econometrisch Instituut.
- Molenaar, I.W., Debets, P., Sijtsma, K. y Hemker, B.T. (1994). *MSP 4.0: A program for Mokken Scale Analysis for Polytomous Items*. Groningen: Iec ProGAMMA.
- Molenaar, I.W. y Sijtsma, K. (1984). Internal consistency and reliability in Mokken's nonparametric item response model. *Tijdschrift voor Onderwijs-research*, 9, 257-268.
- Molenaar, I.W., Sijtsma, K., Van Schuur, W.H. y Mokken, R.J. (1999). *MSPWIN 5.0: A program for Mokken Scale Analysis for Polytomous Items*. Groningen: Iec ProGAMMA.



- Ortiz, A. (1997). *Razonamiento inductivo numérico: Un estudio en Educación Primaria*. Tesis Doctoral, sin publicar. Granada.
- Rasch, G. (1960). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. Copenhagen: Nielsen & Lydiche.
- Rivas, T. (1998). *Mokken scale analysis: An application to items of Numerical Inductive Reasoning*. 11th European Meeting of the Psychometric Society, Lueneburg, Alemania.
- Rivas, T. y Martínez, M. R. (1992). MOKPAS: Un programa para el escalamiento de items según el modelo TRI no paramétrico de Mokken. *Investigaciones Psicológicas*, 187-205.
- Rivas, T., Martínez, M. R. y Hidalgo, R. (1996). *MOKFOR1: A program to fit an accumulative scale to Mokken non parametric IRT model*. 20th Biennial Conference of the Society for Multivariate Analysis in the Behavioral Sciences, ESADE, Barcelona.
- Rosenbaum, P.R. (1984). Testing the conditional independence and monotonicity assumptions of item response theory. *Psychometrika*, 49, 425-435.
- Rosenbaum, P.R. (1987). Comparing item characteristic curves. *Psychometrika*, 52, 217-233.
- Sijtsma, K. (1998). Methodology Review. Non parametric IRT approaches to the analysis of dichotomous item scores. *Applied Psychological Measurement*, 22, 3-31.
- Sijtsma, K. y Meijer, R.R. (1992). A method for investigating the intersection of item response functions in Mokken's nonparametric IRT model. *Applied Psychological Measurement*, 16, 149-157.
- Sijtsma, K. y Molenaar, I.W. (1987). Reliability of test scores in nonparametric item response theory. *Psychometrika*, 52, 79-97.
- Torgerson, W.S. (1958). *Theory and methods of Scaling*. New York: Wiley.

## APENDICE I.

### Coefficientes de Acumulatividad

Con objeto de probar la homogeneidad monótona de un conjunto de ítems, Mokken (1971) desarrolla los coeficientes de acumulatividad o escalabilidad. Antes de describirlos se necesita la siguiente notación básica.

Dada una muestra de  $n$  ítems de un universo de ítems y una población de sujetos que responden a dichos ítems. Se denota  $x_i$  la respuesta de un sujeto, con un nivel de actitud  $\theta$ , al ítem  $i$  y, la probabilidad de que un sujeto con nivel  $\theta$  de una respuesta positiva al ítem  $i$ , viene dada por  $P(x_i = 1/\theta) = \pi_i(\theta)$ .

El orden dado en (1) sobre el conjunto de ítems, permite construir las tablas de las respuestas que dan los sujetos a cada par de ítems: Para cada par de ítems  $i, j$ , se sitúan las respuestas al ítem "más difícil" ( $i$ ) en la fila y las respuestas al ítem menos difícil ( $j$ ) en la columna.

Las respuestas quedan distribuidas en la siguiente tabla:

**Tabla 13.** Probabilidades de respuesta a los ítems  $i, j$

Item j	1	0	Total Fila
Item i			
1	$\pi_{ij}(1,1)$	$\pi_{ij}(1,0)$	$\pi_i$
0	$\pi_{ij}(0,1)$	$\pi_{ij}(0,0)$	$1 - \pi_i$
Total columna	$\pi_j$	$1 - \pi_j$	1

Dado este orden en los pares de ítems  $i, j$ , si estos ítems son "perfectamente" acumulados, entonces  $\pi_{ij}(1,0)$  la probabilidad de error, debe ser cero.

Una medida del grado en que estos ítems no son "perfectamente" acumulados viene dada por el grado en que  $\pi_{ij}(1,0)$  se diferencia de cero. Para ello, dado el orden establecido en los ítems por  $\delta$  si los ítems fuesen independientes, la probabilidad esperada en la celda error - (1,0) - sería

$$\pi_{ij}(1,0) = \pi_i(1 - \pi_j) \quad \text{siendo } i < j \quad (4)$$

Una medida del grado de error o del grado en que  $\pi_{ij}(1,0) \neq 0$  se obtiene en función de la diferencia entre  $\pi_{ij}(1,0)$  y la probabilidad de la respuesta (1,0) en el caso en que los ítems sean independientes, dada en (4).

A partir de esta medida Mokken (1971) define tres coeficientes de acumulatividad o escalabilidad que se muestran a continuación.

**Homogeneidad entre un par de ítems**, denotado  $H_{ij}$  mide el grado de homogeneidad o asociación entre cada par de ítems.

$$H_{ij} = \frac{\pi_{ij}(1,1) - \pi_i \pi_j}{\pi_i(1 - \pi_j)} = 1 - \frac{\pi_{ij}(1,0)}{\pi_i(1 - \pi_j)} \quad \text{siendo } i < j \quad (5)$$

El valor de  $H_{ij}$  es cero si los ítems son independientes y 1 si la "celda error" es cero, es decir, si los ítems son "perfectamente" acumulados.

**Homogeneidad de un ítem i**, denotado  $H_i$ , proporciona la asociación del ítem i con el resto de ítems j: 1, ..., i-1, i+1, ..., n.

$$H_i = \frac{\sum_{j=i}^n [\pi_{ij}(1,1) - \pi_i \pi_j]}{\sum_{j=1}^{i-1} \pi_j(1 - \pi_i) + \sum_{j=i+1}^n \pi_i(1 - \pi_j)} \quad \text{siendo } i < j \quad (6)$$

**Homogeneidad de los ítems de la escala**, denotado H, proporciona la asociación entre todos los ítems de la escala.

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n [\pi_{ij}(1,1) - \pi_i \pi_j]}{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \pi_i(1 - \pi_j)} \quad \text{siendo } i < j \quad (7)$$

El valor de H es cero si todos los ítems que forman la escala son independientes y 1 si la "celda error" es cero, es decir, si los ítems son "perfectamente" acumulados, esto es si la escala es acumulada.

Si en lugar de considerar en la tabla 1, las respuestas dadas por los sujetos de la población, se consideran las respuestas dadas por una muestra de sujetos, se tiene una tabla similar con las proporciones  $P_{ij}$  de respuestas a cada par de ítems. Análogamente a como se han obtenido los coeficientes de acumulatividad en la población, se obtienen los respectivos estimadores de los coeficientes  $\hat{H}_{ij}$ ,  $\hat{H}_i$  y  $\hat{H}$  a partir de las respuestas dadas por los sujetos de una muestra. Es suficiente sustituir en las ecuaciones (5) (6) y (7), las probabilidades  $\pi_{ij}$ ,  $\pi_i$  y  $\pi_j$  por las proporciones de respuestas  $P_{ij}$ ,  $P_i$  y  $P_j$  respectivamente .

### Contraste de hipótesis acerca de los coeficientes de acumulatividad

Si se va a generalizar el grado de homogeneidad proporcionado por los coeficientes de la muestra a la población de sujetos, se necesita del contraste de hipótesis. Mokken (1971, pp. 157-169) propone un estadístico que se distribuye asintóticamente según la Normal, para contrastar la hipótesis nula de que los coeficientes anteriores son cero frente a la alternativa de que son positivos.

**Contraste de Hipótesis acerca de  $H_i$ .** Este contraste se realiza para cada uno de los ítems. Para cada ítem  $i$  se plantea la hipótesis  $H_0: H_i = 0$ ;  $H_1: H_i > 0$ .

El estadístico de contraste, denotado  $\Delta_i^*$ , se define como  $\Delta_i^* = \frac{(N-1)^{1/2} \Delta_i}{\sigma_{i,n-1}}$  (8), siendo

$$\Delta_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Delta_{ij}, \quad \Delta_{ij} = p_{ij} - p_i p_j \quad y \quad \sigma_{i,n-1}^2 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sigma_{ij}^2 \quad y \quad \sigma_{ij}^2 = p_i(1-p_i)p_j(1-p_j)$$

Para muestras de tamaño suficientemente grande,  $\Delta_i^*$  se distribuye según la  $N(0,1)$  (Mokken, 1971, p. 163)

Entonces, si  $\Delta_i^* < z_{1-\alpha}$  no se rechaza la hipótesis nula y si  $\Delta_i^* > z_{1-\alpha}$  se rechaza la hipótesis nula.

### Contraste de Hipótesis acerca de H

Además de realizar los  $n$  contrastes acerca de los coeficientes de homogeneidad de cada ítem  $H_i$ , se efectúa el contraste de hipótesis acerca del coeficiente  $H$  para la escala global.

Si se contrasta la hipótesis  $H_0: H = 0$ ;  $H_1: H > 0$  (la alternativa es unilateral, ya que  $0 \leq H \leq 1$ ). Definido el estadístico de contraste, denotado  $\Delta^*$ , como  $\Delta^* = \frac{(N-1)^{1/2} \Delta}{\sigma_n}$  (9),

$$\text{siendo } \Delta = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \Delta_{ij}, \quad \Delta_{ij} = p_{ij} - p_i p_j \quad y \quad \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sigma_{ij}^2 \quad y \quad \sigma_{ij}^2 = p_i(1-p_i)p_j(1-p_j)$$

Para muestras de tamaño suficientemente grande,  $\Delta^*$  se distribuye según la  $N(0,1)$  (Mokken, 1971, p. 163)

Entonces, si  $\Delta^* < z_{1-\alpha^*}$  no se rechaza la hipótesis nula y si  $\Delta^* \geq z_{1-\alpha^*}$  se rechaza la hipótesis nula.

Siendo  $\alpha^*$  el valor de  $\alpha$  corregido:  $\alpha^* = \frac{\alpha}{\left(\frac{1}{2}\right)n(n-1)}$

## Fiabilidad

Analizado el grado de acumulatividad de una escala Mokken, este autor propone dos procedimientos, basados en interpolación y extrapolación, para estudiar la fiabilidad de la misma.

Considerando el orden establecido en (1) para cada par de items  $i, j$ , se tiene que  $\pi_i^2 < \pi_{ii} < \pi_i$  y  $\pi_{ii} < \pi_{jj}$ . Esta condición debe probarse, y en caso de que no se verifique, se debe sustituir  $\hat{\pi}_{ii}$  por un valor apropiado. Además, se establecen las cotas  $\pi_{i,i-1} < \pi_{ii} < \pi_{i,i+1}$ . Aunque los valores  $\pi_{ii}$  no se pueden estimar, se puede calcular su valor aproximado  $\hat{\pi}_{ii}$  a través de distintas aproximaciones, a partir de los valores  $P_{ij}$ ,  $P_i$  y  $P_j$  de la matriz  $P_{11}$ .

El primer procedimiento calcula  $\hat{\pi}_{ii}$  a partir del

$$\text{mínimo } |p_i - p_j| \text{ siendo } j: i-1, i+1 \text{ para todo } i: 1, \dots, n$$

Si este mínimo es  $P_{i+1}$  (análogamente si es  $P_{i-1}$ ) se puede establecer la siguiente aproximación:

$$\frac{\hat{\pi}_{ii}}{P_{i,i+1}} \cong \frac{P_i^2}{P_i P_{i+1}} = \frac{P_i}{P_{i+1}}$$

Despejando  $\hat{\pi}_{ii}$  se tiene  $\hat{\pi}_{ii} = \frac{P_i P_{i,i+1}}{P_{i+1}} \quad i: 2, \dots, n-1$  (12a)

ó

$$\hat{\pi}_{ii} = \frac{P_i P_{i,i-1}}{P_{i-1}} \quad i: 2, \dots, n-1$$
 (12b)

Para los items 1 y  $n$ , como no existen los términos  $i-1$  e  $i+1$  se necesita de la siguiente corrección:

$$\hat{\pi}_{ii} \cong \frac{P_{1,2} P_1}{P_2} \text{ y } \hat{\pi}_{nn} \cong \frac{P_{n,n-1} P_n}{P_{n-1}} \text{ (12c)}$$

El segundo procedimiento calcula  $\hat{\pi}_{ii}$  utilizando interpolación lineal:

$$\hat{\pi}_{ii} \cong p_{i,i-1} + \frac{p_i - p_{i-1}}{p_{i+1} - p_{i-1}} (p_{i,i+1} - p_{i,i-1}) \quad (13)$$

y estima  $\hat{\pi}_{11}$  y  $\hat{\pi}_{nn}$  con el primer procedimiento, cuyas expresiones están dadas en (12c).

Calculado  $\hat{\pi}_{ii}$ , un estimador de la fiabilidad de la escala global es

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{\pi}_{ii} - p_i^2) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (p_{ij}(1,1) - p_i p_j)}{\sum_{i=1}^n p_i (1 - p_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (p_{ij}(1,1) - p_i p_j)} \quad (14)$$

Molenaar y Sijtsma (1984) y Sijtsma y Molenaar (1987) proponen un tercer procedimiento para estimar  $\hat{\pi}_{ii}$  que trata de resolver algunos inconvenientes de los procedimientos anteriores.

Estos autores proponen una nueva aproximación para obtener  $\hat{\pi}_{ii}$  cuando se invierte el orden de la escala, es decir, cuando se intercambian las respuestas positivas y negativas a los items. En este caso la proporción de 'unos' para un ítem  $i$  es  $1 - \pi_i$ . Efectuando sustituciones en el procedimiento 2 de Mokken resulta la misma expresión, pero la sustitución en las expresiones (12a) y (12b) del procedimiento 1 se obtienen las expresiones (15a) y (15b):

$$\hat{\pi}_{ii} \cong \frac{(1 - p_i) p_{i,i+1}}{1 - p_{i+1}} - p_i \frac{p_{i+1} - p_i}{1 - p_{i+1}} \quad i: 2, \dots, n - 1 \quad (15a)$$

$$\hat{\pi}_{ii} \cong \frac{(1 - p_i) p_{i-1,i}}{1 - p_{i+1}} - p_i \frac{p_i - p_{i-1}}{1 - p_{i-1}} \quad i: 2, \dots, n - 1 \quad (15b)$$

Este resultado muestra que la inversión de la escala no influye en la fiabilidad de la población. Además proponen como el estimador con menos sesgo de  $\pi_{ii}$  la media de los estimadores dados en 12a, 12b, 15a y 15b.

Por otro lado, la existencia de un conjunto C formado por varios items con las mismas proporciones de respuesta correcta, siendo el número de items  $m \geq 2$ , las expresiones anteriores para obtener  $\hat{\pi}_{ii}$  requieren modificaciones. Sijtsma y Molenaar (1987, p. 89) proponen estimar  $\pi_{ii}$ , para todos los items que pertenecen al conjunto C, utilizando las proporciones de respuestas correctas a pares de items del conjunto C:

$$\hat{\pi}_{ii} = \frac{2}{m(m-1)} \sum_{\substack{j < k \\ j, h \in C}} p_{jh} \quad (16)$$

Si existen varios ítems con las mismas dificultades  $P_{i-1} = P_i = P_{i+1}$  no se puede obtener  $\hat{\pi}_{i-1,i-1}$ ,  $\hat{\pi}_{i,i}$ ,  $\hat{\pi}_{i+1,i+1}$  con el segundo procedimiento porque estos ítems no se pueden ordenar.

Con el procedimiento 1, si en la muestra  $P_i - P_{i-1} = P_{i+1} - P_i$  no se puede seleccionar una de las expresiones (12a) y (12b). En tal caso estos autores proponen

- 1) si  $P_i = 0,5$ , basándose en el procedimiento 2, obtener  $\hat{\pi}_{ii} = \frac{1}{2}(p_{i-1,i} + p_{i,i+1})$
- 2) si  $|P_{i-1} - 0,5| < |P_{i+1} - 0,5|$ , obtener  $\hat{\pi}_{ii}$  a partir de la expresión (12<sup>a</sup>)

**APENDICE II****Items definidos en Ortiz (1997).**

- Item 1. 17, 27, 37, 47,.....
- Item 2. 62, 52, 42, 32,.....
- Item 3. 3, 5, 7, 9, .....
- Item 4. 12, 10, 8, 6, .....
- Item 5. 0, 6, 12, 18,.....
- Item 6. 24, 36, 48, 60, .....
- Item 7. 40, 32, 24, 16,.....
- Item 8. 80, 67, 54, 41,.....
- Item 9. 2, 6, 18, 54, .....
- Item 10. 3, 12, 48, 192,.....
- Item 11 . 64, 32, 16, 8,.....
- Item 12. 243, 81, 27, 9, .....